بحوث العمليات واتخاذ القرارات

الاساليب - التطبيق - أستخدم الحزم الرياضية

الجزء الأول

البرمجة وحيدة الهدف

الطبعة الثانية

الدكتورة

عفاف على حسن الدش

أستاذبحوث العمليات ورئيس قسم الرياضة والإحصاء التطبيقي
كلية التجارة وإدارة ألاعمال - جامعة حلوان

يناير ٢٠١٢ م

بحوث العمليات واتخاذ القرارات

الأساليب – التطبيق – استخدام حزم البرامج الجاهزة

الجزء الأول

البرمجة وحيدة الهدف

الطبعة الثانية

الدكتورة

عفاف على حسن الدش

أستاذ بحوث العمليات ورئيس قسم الرياضة والإحصاء التطبيقي

كلية التجارة وإدارة الأعمال – جامعة حلوان

يناير ٢٠١٢م

بحوث العمليات واتخاذ القرارات

الأساليب – التطبيق – استخدام حزم البرامج الجاهزة

الجزء الأول

البرمجة وحيدة الهدف

الطبعة الثانية

ربيع أول ١٤٣٣هـ - يناير ٢٠١٢م

الدكتورة

عفاف على حسن الدش

أستاذ بحوث العمليات ورئيس قسم الرياضة والإحصاء التطبيقي

كلية التجارة وإدارة الأعمال – جامعة حلوان

الطبعة الأولي: سنة١٩٨٧– الناشر – مكتبة عين شمس – شارع القصر العيني القاهرة.

رقم الإيداع: ٨٨٨٧ / ١٩٨٧

الترقيم الدولي: ٠-٣-٠١١٣-٠٧-٩٧٧

الطبعة الثانية:

رقم الإيداع: ٢٠١٢/٣٥٧٣

الترقيم الدولي:١-٠٥٥-٧١٦-٩٧٧-٩٧٨

بسم الله الرحمن الرحيم

{ أَنزَلَ مِنَ السَّمَاء مَاء فَسَالَتْ أَوْدِيَةٌ بِقَدَرِهَا فَاحْتَمَلَ السَّيْلُ زَبَداً رَّابِياً وَمِمَّا يُوقِدُونَ عَلَيْهِ فِي النَّارِ ابْتِغَاء حِلْيَةٍ أَوْ مَتَاعٍ زَبَدٌ مِّثْلُهُ كَذَلِكَ يَضْرِبُ اللّهُ الْحَقَّ وَالْبَاطِلَ فَأَمَّا الزَّبَدُ فَيَذْهَبُ جُفَاء وَأَمَّا مَا يَنفَعُ النَّاسَ فَيَمْكُثُ فِي الأَرْضِ كَذَلِكَ يَضْرِبُ اللّهُ الأَمْثَالَ }

صدق الله العظيم

سورة الرعد (الآيه ١٧)

الفهرس

الموضوع	الصفحة

الموضوع	الصفحة

الموضوع	الصفحة

الموضوع	الصفحة

الموضوع	الصفحة

مقدمة

مما لا شك فيه، أن الوصول لتحقيق غاية معينة أو الوصول للحل الأمثل لمشكلة ما، يتطلب إتباع الأساليب العلمية.

وتعتبر بحوث العمليات هي مجموعة من الأساليب العلمية المتكاملة Integrated Scientific Techniques التي تمكن متخذ القرار من الوصول إلى الغاية المرجوة أو الحل الأمثل لمشكلة ما في ظل الإمكانيات المادية وغير المادية المتاحة.

وتعتبر الأساليب الرياضية Mathematical Techniques العمود الفقري لأساليب بحوث العمليات، لذا كانت تعرف أساليب بحوث العمليات إلى وقت ليس ببعيد بأنها مجموعة من الأساليب الرياضية. ولكن نظراً للاتساق الوثيق بين هذه الأساليب الرياضية والعلوم الأخرى مثل برمجة الحاسب، نظم المعلومات، الإحصاء، ...الخ، فأصبحت تعرف أساليب بحوث العمليات بأنها مجموعة من الأساليب العلمية المتكاملة مما يتطلب ضرورة العمل بنظام الفريق في تطبيق أو تطوير هذه الأساليب.

وترجع نشأت أساليب بحوث العمليات وتطبيقاتها للمرة الأولى إلى الحرب العالمية الثانية سنة ١٩٤٠م في المملكة المتحدة البريطانية. ولكن تطويرها وتطبيقها على نطاق واسع فكان في الولايات المتحدة الأمريكية. فقد أدي تطبيق أساليب بحوث العمليات بعد الحرب الثانية في شركات البترول والنقل والتشييد إلى توفير بلايين الدولارات سنوياً.

ومما هو جدير بالذكر أن التطور العظيم في علوم واستخدام الحاسب هو الذي أدي إلى تطوير وتطبيق بحوث العمليات على نطاق واسع. فبدون هذا التطوير

في علوم واستخدام الحاسب ما أمكن تطوير وتطبيق أساليب بحوث العمليات في شكلها الحالي.

وتعاني المكتبة العربية من نقص شديد في الكتابات العلمية بصفة عامة وفي بحوث العمليات بصفة خاصة.

ونظراً لأهمية أساليب بحوث العمليات في حل العديد من المشاكل التطبيقية الهامة كذلك استخدامها في حل العديد من المشاكل العلمية في العلوم الأخرى مثل الإحصاء*، الإدارة**، ...الخ. مما دفعني لكتابة ونشر هذا الكتاب سنة ١٩٨٧م، ثم إعادة كتابته وتطويره ليواكب التطور المستمر في بحوث العمليات.

لذلك يعتبر هذا الكتاب محاولة لتقديم بعض أهم أساليب بحوث العمليات بأسلوب يتسم بالبساطة والعمق والشمولية في نفس الوقت.

فيتناول الكتاب بعض أساليب بحوث العمليات من الجانب النظري والجانب التطبيقي أيضاً بالإضافة إلى تناول كيفية استخدام حزم برامج الحاسب الجاهزة Operations Research Packedges مثل حزمة TORA، وحزمة Maple11 في حل المشاكل المرتبطة بالأساليب المقدمة. ويرجع ذلك لأهمية استخدام حزم برامج الحاسب الجاهزة في توفير الوقت والجهد وبصفة خاصة بالنسبة للمشاكل ذات الحجم الكبير Large Size's Problems بالنسبة للمتخصصين وغير المتخصصين.

* Arthanari and Yadolah (1993): "Mathematical Programming In Statistics" JOHN Wiley & Sons, INC, New York.

** Lawrence (1994): "Quantities Methods for Business Decisions – With Cases" The Dryden Press, New York

والمستهدفون من هذا الكتاب هم طلاب مرحلتي البكالوريوس والدراسات العليا في التخصصات المختلفة (الإحصاء – الإدارة – الاقتصاد – ...الخ)، كذلك متخذي القرارات في المجالات المختلفة. ويحتوي هذا الكتاب على عشر أبواب:

الباب الأول تحت عنوان: ما هي بحوث العمليات

ويتناول هذا الباب تعريف أساليب بحوث العمليات وتطورها التاريخي ودورها في صناعة القرارات. كذلك يقدم بعض أساليب بحوث العمليات والأنواع المختلفة لنماذج بحوث العمليات.

بالإضافة إلى أهم مجالات استخدام بحوث العمليات، كذلك يتناول أهم متطلبات تعليم وتطبيق أساليب بحوث العمليات المقدمة من العلوم الأخرى.

الباب الثاني تحت عنوان: نماذج البرمجة الخطية

ويتناول هذا الباب مشاكل البرمجة الخطية وكيفية صياغتها في شكل نماذج برمجة خطية، بالإضافة إلى كيفية تحويل بعض نماذج البرمجة غير الخطية إلى نماذج برمجة خطية. مع تقديم مجموعة من الأمثلة والعديد من التمرينات المتنوعة.

الباب الثالث تحت عنوان: طرق حل نماذج البرمجة الخطية

ويتناول هذه الباب الطرق المختلفة لحل النماذج المختلفة للبرمجة الخطية بيانياً وجبرياً بالإضافة إلى تناول بعض الحالات الخاصة. ثم يتناول كيفية استخدام حزمة TORA لحل نماذج البرمجة الخطية بيانياً أو جبرياً. مع تقديم العديد من الأمثلة ومجموعة متنوعة من التمرينات.

الباب الرابع تحت عنوان: مشكلة النقل

ويتناول هذا الباب تعريف مشكلة النقل وخصائصها وكيفية صياغة المشكلة كنموذج برمجة خطية. كذلك يقدم الطرق المختلفة لإيجاد حل مبدئي للمشكلة ثم تقديم طريقة المسارات المغلقة لإيجاد الحل الأمثل للمشكلة. كذلك يتناول كيفية استخدام حزمة TORAلحل النموذج بالإضافة إلى تقديم العديد من الأمثلة ومجموعة متنوعة من التمرينات.

الباب الخامس تحت عنوان: مشكلة التخصيص

ويتناول هذا الباب مشكلة التخصيص وخصائصها وصياغتها كنموذج برمجة خطية وتقديم الخوارزم الهنغاري للحصول على الحل الأمثل. ثم يتناول كيفية استخدام حزمة TORA لحل النموذج بالإضافة إلى تقديم العديد من الأمثلة ومجموعة متنوعة من التمرينات.

الباب السادس تحت عنوان: المشكلة الثنائية وتحليل الحساسية

ويتناول هذا الباب تعريف المشكلة الثنائية وكيفية الحصول عليها من المشكلة الأصلية كذلك التفسير الاقتصادي للمتغيرات الثنائية. هذا بالإضافة إلى تقديم تحليل حساسية الحل الأمثل للتغير في بعض معلمات النموذج. ثم تقديم مجموعة من الأمثلة المتنوعة والتمرينات.

الباب السابع تحت عنوان: مشاكل البرمجة الخطية العكسية

ويقتصر هذا الباب على مشكلة البرمجة الخطية العكسية من حيث تعريف المشكلة ثم الصياغة الرياضية لها وطريقة حل المشكلة، نظراً لأنه في العديد من المشاكل الفعلية يرغب متخذ القرار في تحديد

التغيرات المثلي في بعض المعلمات لجعل حل ممكن معين هـو الحـل الأمثل للمشكلة. ثم تقديم مجموعة من التمرينات.

الباب الثامن تحت عنوان: اشتقاق طريقة السمبلكس

يقدم هذا الباب كيفية اشتقاق طريقة الـسمبلكس مـن خـلال شـرطي الأمثلية والإتاحة (الإمكانية) وتطلب ذلك تقديم عـدد مـن التعريفـات والنظريات المرتبطة بهذين الشرطين.

كذلك يتناول هذا الباب طريقة السمبلكس المعدلة. بالإضافة إلى تقـديم أثبات لبعض العلاقات المقدمة في تحليل الحساسية بالبـاب الـسادس. بالإضافة إلى مجموعة من الأمثلة والتمرينات.

الباب التاسع تحت عنوان: البرمجة غير الخطية

ويتناول هذا الباب مشاكل البرمجة غير الخطية غير المقيدة والمقيـدة وطرق الحل التحليلية والعددية التي يمكن استخدامها في حـل بعـض مشاكل البرمجة غير الخطية وفقاً لخصائص المشكلة.

بالإضافة إلى تقديم كيفية استخدام حزمة Maple11 للحصول على حل هذا النوع من المشاكل كذلك تقديم مجموعة من الأمثلة والتمرينات.

الباب العاشر تحت عنوان: البرمجة الهندسية

ويتناول هذا الباب تعريف البرمجة الهندسية وتقديم أسـلوب البرمجـة الهندسية كأحد أساليب حل بعض مشاكل البرمجة غير الخطية في حالة المشاكل ذات الحدود الموجبة Posynomial Problems كذلك فـي الحالة العامة Signomial Problems. وتقديم مجموعة من الأمثلـة المتنوعة والتمرينات.

كذلك يتضمن الكتاب سبعة ملاحق تتضمن بعض المتطلبات الرئيسية لتناول أساليب بحوث العمليات بالإضافة إلى قائمة متنوعة من المراجع العربية والأجنبية.

وأخيراً أرجو من الله عز وجل أن يجد القارئ العربي في هذا الكتاب لبنه من لبنات البناء، عسى أن تجد من المتخصصين العرب من يقدم إسهاماته في هذه العلوم.

والله ولى التوفيق

المؤلفة

أ.د عفاف على حسن الدش

أستاذ بحوث العمليات

كلية التجارة – جامعة حلوان

الباب الأول

ما هي بحوث العمليات

(١-١) تعريف بحوث العمليات

Definition of the Operations Research (OR)

مما لا شك فيه أن صناعة القرارات Decisions Making ومتابعة تنفيذها، في أي مجال من مجالات الحياة، تتطلب اللجوء إلى الأساليب العلمية Scientific Techniques التي تمكن صانعي القرارات والقائمين على تنفيذها من الوصول إلى الغايات المرجوة في ظل الإمكانيات المتاحة [٥].

فعلي سبيل المثال: إذا كان هدف متخذ القرار في أحدي المؤسسات الصناعية التي تقوم بإنتاج السلع المختلفة A , B , C , D , E هو تحديد عدد الوحدات التي يتم إنتاجها من كل سلعة في العام التالي، بحيث تحقق المؤسسة أكبر ربح ممكن في ظل الإمكانيات المتاحة لديها من مواد خام، عمالة، زمن تشغيل، ظروف السوق المتوقعة، ... الخ. ولتحديد الكميات التي يجب إنتاجها من كل سلعة بحيث يكون الربح أكبر ما يمكن في ظل الإمكانيات المتاحة، فإن ذلك يتطلب أن تلجأ المؤسسة إلى تطبيق مجموعة من الأساليب العلمية المتكاملة (رياضية Mathematical ، إحصائية Statistical ، اقتصادية Economical ،... الخ) التي تمكنها من تحديد هذه الكميات [٦].

وتعتبر بحوث العمليات مجموعة من الأساليب العلمية المتكاملة Integrated Scientific Techniques، بحيث تمثل الأساليب الرياضية Mathematical Techniques العمود الفقري لهذه الأساليب العلمية [47,52].

وتمكن هذه الأساليب العلمية المتكاملة صانع القرار Decision's Maker من اتخاذ القرارات المثلي Optimum Decisions في ظل الإمكانيات المادية

وغير المادية المتاحة، كذلك تمكن متخذ القرار متابعة تنفيذ القرارات وتقييم الآثار المترتبة على تنفيذها [55 , 39].

ووفقاً لهذا التعريف يتطلب استخدام وتطبيق بحوث العمليات بكفاءة، العمل بنظام الفريق من المتخصصين وفقاً لطبيعة المشكلة. ففي المثال السابق نجد أن حل المشكلة باستخدام أساليب بحوث العمليات فإن ذلك يتطلب وجود متخصصين في الرياضيات، الإحصاء، الاقتصاد، الحاسب الآلي (الكمبيوتر).

نبذة تاريخية عن بحوث العمليات Origin of O.R.

نشأت أساليب بحوث العمليات وأستخدمت للمرة الأولي أثناء الحرب العالمية الثانية (سنة ١٩٤٠م) في المملكة المتحدة البريطانية. حيث تكون فريق من العلماء في الرياضيات، الهندسة، الاقتصاد، الفيزياء، ... الخ، في انجلترا بهدف دراسة العمليات المرتبطة بالدفاع الجوي والبري والإمدادات العسكرية في الأماكن المختلفة وذلك للتعرف على أفضل Best استخدام ممكن للمعدات الحربية وجميع الإمكانيات المتاحة. وأدي نجاح الأساليب التي وضعها هذا الفريق إلى انشأ فريق آخر مماثل في الولايات المتحدة الأمريكية في نفس الفترة الزمنية تقريباً. ومن هذه البداية التاريخية اكتسبت مجموعة هذه الأساليب أسمها "بحوث العمليات" أي البحوث اللازمة لإدارة العمليات الحربية بكفاءة [٧].

وأدي نجاح هذه الأساليب في المجالات الحربية في فترة الحرب وبعدها إلى استخدامها في المجالات المدنية: اقتصادية، أو أدارية، أو سياسية، أو اجتماعية، ... الخ – حيث تعقدت مشاكل اتخاذ القرار في جميع المجالات المدنية نظراً لتضخم حجم المشروعات وتزايد استخدام التخصص وتقسيم العمل [٢ ، ٥].

فقد أدي استخدام هذه الأساليب في شركات البترول والنقل والتشييد إلى توفير بلايين الدولارات سنوياً لهذه الشركات[52 , 47].

وبالرغم من نشأة علم بحوث العمليات في المملكة المتحدة البريطانية إلا أن نمو وتطور وتطبيق هذه الأساليب على نطاق واسع كان في الولايات المتحدة الأمريكية، وبصفة خاصة بعد أن توصل عالم الرياضيات دانتزيج **Dantzig** سنة ١٩٤٧م إلى تقديم طريقة رياضية تسمي طريقة السمبلكس **Simplex Method**، حيث أمكن باستخدام هذه الطريقة حل كثير من المشاكل الإدارية، الصناعية، ... الخ مما أدي إلى توفير بلايين الدولارات [٦].

وفي هذا الكتاب سوف نقدم هذه الطريقة وأهم تطبيقاتها في الأبواب التالية. ونظراً لاعتماد تطبيق أساليب بحوث العمليات على البيانات **Data**، فقد أدي تطور علوم الحاسبات ونظم تخزين واسترجاع المعلومات **Information** وتطوير لغات البرمجة واستخدام الحاسبات الالكترونية (كمبيوتر) على نطاق واسع إلى سرعة تطوير وتطويع أساليب بحوث العمليات وتطبيقاتها على نطاق واسع، وترتب على ذلك تزايد أهمية هذه الأساليب [٩].

ومما هو جدير بالذكر أنه بدون تطوير واستخدام الحاسبات الالكترونية على نطاق واسع كذلك التطور الهائل في علوم الرياضيات والإحصاء ونظم المعلومات، ما أمكن تطبيق أساليب بحوث العمليات على نطاق واسع، وما أمكن تطويرها واستخدامها في شكلها الحالي.

(١-٢) دور بحوث العمليات في صناعة القرار
Role of O.R. in Decision Making

في كثير من الأحيان تستخدم كلمة قرار Decision، فما هو القرار؟، وما هي مكوناته؟ وما هي خصائصه؟ [39].

ويمكن تعريف القرار بأنه النتيجة النهائية لعملية Conclusion of A Process تسمي عملية صناعة القرار Decision Process حيث يتم تحقيق هدف أو أهداف Objectives معينة في ظل إمكانيات محدودة Limited Possibilities باستخدام بدائل مختلفة Different alternatives ويختار متخذ القرار أفضل بديل best alternative من هذه البدائل في ظل رؤيته لبيئة صناعة القرار.

وبهذا التعريف، نجد أن صناعة القرار تتضمن جميع الأنشطة Activities والفكر Thinking الضرورية لتحديد أفضل اختيار لحل المشكلة، وبالتالي فهي عملية معقدة ومتشابكة [44].

أن عملية صناعة القرار عملية تصاعدية تمر بمراحل متتالية كما هو موضح بشكل (١-١) حيث لا يمكن بدأ مرحلة إلا بعد انتهاء المرحلة السابقة لها.

ويمكن تلخيص وتبسيط مراحل صناعة القرار على النحو التالي [٩]:

<u>المرحلة الأولي:</u>

وفي هذه المرحلة يتم تناول المشكلة وتحليلها من جميع الجوانب المختلفة في ظل البيانات المتاحة عن المشكلة (أو النظام) بحيث يتم تحديد عناصر المشكلة في صورة كمية من حيث:

١- المتغيرات.

٢- الإمكانيات المتاحة.

٣- الأهداف المطلوب تحقيقها.

٤- العلاقات المتشابكة بين متغيرات المشكلة.

ومن متطلبات هذه المرحلة الإلمام الجيد بتحليل النظم System Analysis وفقاً لطبيعة المشكلة (اقتصادية، اجتماعية، ... الخ) وقواعد البيانات Data Base والإحصاء الوصفي Descriptive Statistics.

المرحلة الثانية:

وفي هذه المرحلة يتم جمع وعرض وتحويل البيانات Data المتعلقة بعناصر المشكلة من متغيرات وإمكانيات متاحة وطبيعة العلاقات والأهداف وتحويلها إلى معلومات Information ثم تحويل المعلومات إلى معرفة Knowledge. وبالتالي تكون صورة رقمية دقيقة للمشكلة (أو النظام) لصانع القرار. وسوف نوضح ذلك من خلال الأمثلة التالية.

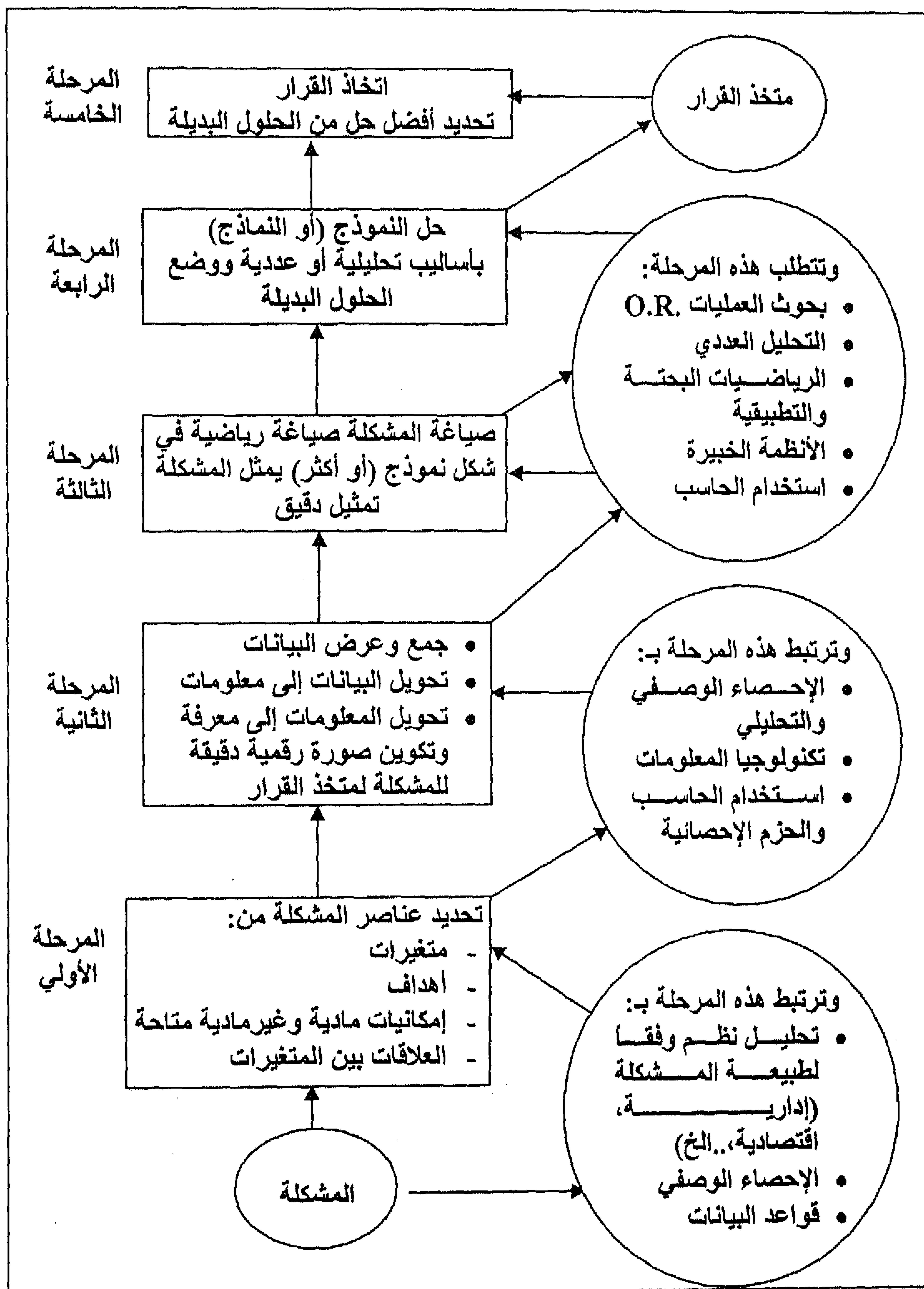
ومن متطلبات هذه المرحلة الإلمام الجيد بأساليب الإحصاء الوصفي والتحليلي وتكنولوجيا المعلومات واستخدام الحزم الإحصائية مثل SSPS [٨] أنظر ملحق رقم (٦).

المرحلة الثالثة:

وفي هذه المرحلة يتم صياغة المشكلة صياغة رياضية في شكل نموذج رياضي Mathematical Model (أو أكثر) يمثل المشكلة تمثيل دقيق.

ومن متطلبات هذه المرحلة الإلمام الجيد بأساليب بحوث العمليات وتطبيقاتها، كذلك الإلمام بالأنظمة الخبيرة Expert Systems وأساليب الرياضية البحتة والتطبيقية Pure and Applied Mathematics، ... الخ.

شكل (١-١): مرحلة صناعة القرار والعلوم المرتبطة بكل مرحلة



ويلعب التفكير Thinking العلمي السليم دور بالغ الأهمية في هذه المرحلة فبقدر تمثيل النموذج (أو النماذج) للمشكلة تمثيل شامل ودقيق يتوقف الوصول فيما بعد للحل الأمثل (الأفضل) للمشكلة.

المرحلة الرابعة:

وفي هذه المرحلة يتم حل النموذج (أو النماذج) الذي تم تكوينه في المرحلة السابقة باستخدام الأساليب التحليلية Analytical Techniques أو باستخدام الأساليب العددية Numerical Techniques وتحديد الحلول البديلة الممكنة.

ومن متطلبات هذه المرحلة استخدام أساليب بحوث العمليات أيضاً والرياضيات البحتة والتطبيقية، والتحليل العددي Numerical Analysis، وحزم البرامج الجاهزة لأساليب بحوث العمليات والرياضيات.

المرحلة الخامسة:

وبعد تحديد الحلول البديلة الممكنة وتقييم كل حل – يتم عرض هذه الحلول على متخذ القرار ويتم تحديد أفضل حل من بين هذه الحلول، ويصبح القرار هو أفضل حل تم تحديده.

ومن المراحل السابقة يتضح دور بحوث العمليات في صناعة القرار كذلك يتضح أن تطبيق أساليب بحوث العمليات بكفاءة يتطلب ضرورة العمل بنظام الفريق. وفيما يلي سوف نعطي أمثلة بسيطة توضح المراحل السابقة في عملية صناعة القرار.

مثال (١-١): تقوم إحدى شركات صناعة الأخشاب بصناعة نوع معين من الكراسي والترابيزات الخشبية. وترغب الشركة في تحديد عدد الكراسي والترابيزات التي تقوم بإنتاجها هذا الشهر لعرضها في السوق الداخلي الشهر القادم، بحيث يكون ربح الشركة أكبر ما يمكن. وهنا يكون القرار هو تحديد عدد الكراسي وعدد الترابيزات التي تقوم الشركة بإنتاجها هذا الشهر. والمطلوب تحديد المراحل المختلفة لصناعة القرار في هذه المشكلة.

الحل: المرحلة الأولي

في هذه المرحلة يتم تحديد عناصر المشكلة على النحو التالي:

١- الهدف هنا هو تحقيق أكبر ربح ممكن (حيث أن ربح الوحدة المنتجة عبارة عن الفرق بين متوسط سعر بيع الوحدة ومتوسط تكلفة الوحدة).

٢- تحديد الإمكانيات المتاحة للشركة لإنتاج الكراسي والترابيزات مثل:

- الأخشاب المتاحة لذلك.
- عدد ساعات العمل المتاحة للتشغيل وما تتطلبه من عمالة وخطوط إنتاج.
- متوسط تكلفة إنتاج الوحدة.
- حجم الطلب في السوق المحلي في الشهور السابقة على الوحدات المطلوب إنتاجها.
- متوسط سعر بيع الوحدة المنتجة في السوق المحلي في الشهور السابقة.
- الظروف الاقتصادية المتوقعة من كساد أو رواج أو ظروف عادية على السلع محل الدراسة

<u>المرحلة الثانية:</u> وفي هذه المرحلة يتم:

- جمع بيانات عن سعر بيع الوحدة المنتجة في الشهور السابقة، ومن هذه البيانات يتم تقدير متوسط سعر بيع الوحدة في الشهر القادم باستخدام الأساليب الإحصائية. وليكون متوسط سعر بيع الكرسي المقدر يساوي μ_1 حيث $\mu_1 = 200$ كذلك متوسط سعر بيع الترابيزة المقدر يساوي μ_2 حيث $\mu_2 = 600$، وهنا تم تحويل البيانات إلى معلومات **Information**.

  كذلك يمكن إيجاد فترة الثقة* لمتوسط سعر بيع الكرسي ولتكن $180 \le \mu_1 \le 250$ باحتمال 95% مثلاً - بالمثل $550 \le \mu_2 \le 650$ باحتمال 90% مثلاً. وهنا تم تحويل المعلومات إلى معرفة **Knowledge** باستخدام أساليب الاستدلال الإحصائي وبالتالي إمكانية تقدير المخاطرة الممكنة في حالة حدوث أي ظروف أخرى لم تأخذ في الحساب [34,40].

- بالمثل يتم جمع بيانات عن حجم الطلب في الشهور السابقة على الكراسي والترابيزات، وتقدير متوسط حجم الطلب المقدر على الكراسي كذلك على الترابيزات في الشهر القادم (وهنا تم تحويل البيانات إلى معلومات) ثم تقدير فترة الثقة لحجم الطلب وتقدير المخاطر أيضاً (وهنا تم تحويل المعلومات إلى معرفة أيضاً).

- تحديد كمية الخشب المتاح لتصنيع الكراسي والترابيزات كذلك تحديد حجم الخشب المطلوب لتصنيع الكرسي الواحد والترابيزة الواحدة.

* أ.د. عفاف الدش (٢٠٠٦): الإحصاء التطبيقي – الجزء الثاني – الاستدلال الإحصائي – الطبعة الثالثة – جهاز نشر وتوزيع الكتاب الجامعي – جامعة حلوان – القاهرة.

- تحديد زمن التشغيل لتصنيع الكرسي الواحد كذلك الترابيزة الواحدة كذلك زمن التشغيل الكلي المتاح.
- متوسط تكلفة الكرسي الواحد، كذلك متوسط تكلفة الترابيزة الواحدة.

ومن البيانات والمعلومات والمعرفة التي تم تقديمها في هذه المرحلة أصبح لدى متخذ القرار صورة رقمية دقيقة عن عناصر المشكلة التي تم تحديدها في المرحلة الأولي.

المرحلة الثالثة:

في هذه المرحلة وبعد ترجمة عناصر المشكلة لتأخذ الشكل الكمي فإنه يمكن صياغة المشكلة كنموذج رياضي. ويتطلب بناء النموذج الرياضي أستخدام أساليب بحوث العمليات، ولكن يتطلب أيضاً القدرة على استخدام هذه الأساليب بكفاءة تتيح تطويعها وتطويرها بحيث تتوائم مع طبيعة المشكلة – أي يتطلب أعمال الفكر أيضاً. فبالنسبة لهذه المشكلة ممكن أن يأخذ النموذج الشكل التالي.

إذا رمزنا لعدد الوحدات التي يمكن إنتاجها من الكراسي بالرمز X_1 ، ولعدد الوحدات التي يمكن إنتاجها من الترابيزات بالرمز X_2 ، حيث $X_1, X_2 \geq 0$. كذلك إذا رمزنا لمتوسط ربح الكراسي بالرمز P_1 (حيث متوسط الربح للكرسي يساوي الفرق بين متوسط سعر بيع الكرسي ومتوسط تكلفتة) كذلك بالمثل إذا رمزنا لمتوسط ربح الترابيزة بالرمز P_2 . فإنه يمكن صياغة هدف الشركة على النحو التالي:

أوجد قيم X_1, X_2 بحيث

$$\text{Max.}Z = P_1X_1 + P_2X_2 \qquad (1)$$

كذلك إذا رمزنا لكمية الخشب المتاح للشركة بالرمز M وعدد ساعات التشغيل المتاحة بالرمز H فإن الهدف الممثل في تعظيم الدالة Z في (1) يخضع للقيود:

$$m_1X_1 + m_2X_2 \leq M \qquad (2)$$

$$h_1X_1 + h_2X_2 \leq H \qquad (3)$$

حيث تشير m_i، h_i إلى احتياج الوحدة من المنتج i، $i = 1,2$ من الخشب وساعات التشغيل على الترتيب.

وبالتالي يصبح النموذج الرياضي الممثل للمشكلة على النحو التالي:

$$\begin{aligned} &\text{Max.}Z = P_1X_1 + P_2X_2 \\ &\text{S.T.} \quad m_1X_1 + m_2X_2 \leq M \\ &\qquad\quad h_1X_1 + h_2X_2 \leq H \\ &\qquad\quad X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

والنموذج الرياضي في (4) يمثل نموذج برمجة خطية يمكن حله باستخدام أساليب بحوث العمليات والحصول على الحلول البديلة الممكنة والمثلي. وهذه المرحلة تتطلب استخدام أساليب بحوث العمليات وأعمال التفكير أيضاً في الحصول على الحلول الممكنة البديلة والمثلي.

المرحلة الرابعة:

بعد الحصول على الحل أو الحلول الممكنة البديلة والمثلي في المرحلة السابقة يتم عرضها على متخذ القرار ووفقاً للبيئة التي يتم اتخاذ القرار فيها يقوم متخذ القرار باختيار أفضل حل من ضمن الحلول البديلة الممكنة والمثلى وليكن X_1^*, X_2^*, Z^*.

(١-٣) بعض أساليب بحوث العمليات
Some O.R. Techniques

ومنذ نشأت أساليب بحوث العمليات (سنة ١٩٤٠ م) وبدأت تتطور وتتزايد بسرعة فائقة نظراً لظهور مشاكل لم تكون موجودة عند نشأت هذه الأساليب بالإضافة إلى الإمكانيات الهائلة التي وفرها استخدام الكمبيوتر ويوجد حالياً كثير من أساليب بحوث العمليات التي يتم استخدامها وتطبيقها في كثير من المجالات. وفيما يلي سوف نذكر أهم هذه الأساليب.

أولاً: أساليب الأمثلية Optimization Techniques

أساليب الأمثلية هي مجموعة من الأساليب الرياضية يمكن باستخدامها الوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة وفقاً لشروط معينة (ولكن تطبيقها يتطلب استخدام الأساليب الإحصائية والحاسب).

وعادة تسمى أساليب الأمثلية بالبرمجة الرياضية Mathematical Programming ومن هذه الأساليب على سبيل المثال الأساليب التالية:

١- البرمجة الخطية Linear programming (L.P.)

٢- البرمجة غير الخطية Non-linear programming (N P.)

٣- البرمجة الصحيحة Integer programming (I P)

٤- البرمجة الديناميكية Dynamic Programming (D P)

٥- البرمجة الاحتمالية Probabilistic Programming (Prob.P)

٦- برمجة تعدد الأهداف Multi-Objective Programming (Multi O P)

٧- البرمجة الهندسية Geometric Programming (G P)

٨- برمجة الهدف Goal Programming (Go.P)

٩- البرمجة العشوائية　Stochastic programming (S P)

١٠-البرمجة الكسرية　Fractional Programming (F.P)

ثانيا: أساليب الانتظار Waiting Techniques

وهى ما تسمى عادة بأنظمة الصفوف Queuing Systems ومنها علـى سبيل المثال :

١- أنظمة الخدمة المتوازية　Parallel Service systems

٢- أنظمة الخدمة المتوالية　Series (Tandem)Service Systems

٣- أنظمة الخدمة الدائرية　Cyclic Service Systems

ثالثاً: أساليب الصلاحية Reliability Systems

ومنها على سبيل المثال :

١- أنظمة الصلاحية　Reliability Systems

٢- أنظمة القابلية للصيانة　maintainability Systems

٣- أنظمة الإحلال　Replacement System

رابعاً: أساليب المنافسة Competitive Techniques

ومنها على سبيل المثال :

١- نظرية المباريات　Game theory

٢- نماذج المضاربة　Bidding Models

خامساً: أساليب المحاكاة Simulation Techniques

سادساً:أساليب توقيت وضبط وتنفيذ المشروعات

Program Evaluation and Review Techniques (PERT)

سابعاً: أساليب التخزين Inventory Techniques

(١-٤) نماذج بحوث العمليات O. R. Models

وعادة تكون المشاكل الحقيقية Realistic Problems (أو الأنظمة الحقيقية Realistic Systems) كثيرة العناصر التي ترتبط ببعضها بعلاقات متشابكة ومعقدة. ولكن رغم كثرة وتعقد عناصر (أو متغيرات) المشكلة أو النظام، إلا أنه بصفة عامة نجد أن جزء صغير من هذه المتغيرات هو المؤثر فى سلوك المشكلة (أو النظام) وتسمى هذه المتغيرات المؤثرة بالمتغيرات السائدة Dominant Variables.

والصياغة الرياضية Mathematical Form للمتغيرات (أو العناصر) السائدة للمشكلة والعلاقات بينها تسمى بالنموذج Model الأولى. وبالتالي فأن النموذج هو تبسيط للنظام (أو المشكلة) الحقيقي حيث يتم بناءه أولياً اعتماداً على تحديد المتغيرات السائدة Dominant Variables والعلاقات بينهم ثم يتم تطويره بقدر الإمكان ليتضمن المتغيرات السائدة والمتغيرات الأخرى [52 , 47].

ويمكن تصنيف نماذج بحوث العمليات وفقاً لطبيعة بناء النموذج وطريقة حله، وسوف نذكر منها هنا ثلاثة أنواع هي:

<u>النوع الأول:</u> النماذج التحليلية Analytic Models

<u>النوع الثاني:</u> نماذج المحاكاة Simulation Models

<u>النوع الثالث:</u> النماذج الكشفية Heuristic models

واستخدام النماذج من النوع الأول أو ما تسمى بالنماذج التحليلية يمكننا من الحصول على الحل الأمثل (الأفضل) Optimum (Best) Solution

للمشكلة محل الدراسة ومن أمثلة هذه النماذج نماذج البرمجة الخطية Linear Programming Models.

ولكن أحيانا تكون الصياغة الرياضية Mathematical Formulation للنماذج التحليلية معقدة للغاية والوصول إلى حلها يتطلب عمليات مكررة ومطولة جداً. وفى هذه الحالات يستخدم النوع الثالث من النماذج وهى ما تسمى بالنماذج الكشفية ، والتي يمكن بحلها الحصول على حلول تقريبية جيدة Good Approximate Solutions للمشاكل كما في حالة بعض النماذج للبرمجة غير الخطية Non-linear programming Models .

أما النوع الثاني من النماذج أو ما تسمى بنماذج المحاكاة حيث يتم تقليد سلوك النظام محل الدراسة من خلال الصياغات الرياضية Mathematical Forms للتعرف على الآثار النهائية للقرارات التي يمكن اتخاذها. وذلك من خلال المعلومات المتوفرة عن سلوك النظام في فترات زمنية سابقة.

ويختلف النموذج التحليلي عن نموذج المحاكاة والنموذج الكشفي في أن هيكل النموذج التحليلي هيكل محدد. وعادة يتكون هذا الهيكل المحدد من العناصر الأساسية التالية:

أولاً: المتغيرات القرارية Decision Variables

والمتغيرات القرارية هي المجاهيل المطلوب تحديد قيمتها. فمثلاً إذا كان المطلوب تحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من ثلاثة أنواع من السلع التي تقوم أحدى الشركات بإنتاجها بحيث تحقق الشركة أقصى ربح ممكن. في هذه الحالة تكون عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من الأنواع الثلاثة تمثل ثلاثة متغيرات قرارية المطلوب تحديد قيمة كل منهم.

ثانيا: المتغيرات التحكمية(المعلمات)

Controlled Variables (Parameters)

والمتغيرات التحكمية أو ما تسمى بالمعلمات Parameters هي عبارة عن المتغيرات المؤثرة فى المشكلة (أو النظام) وبالتالي مؤثرة في حلها ولا يتم تحديد قيمها من قبل متخذ القرار ولكن تعتبر معطيات بالنسبة له.

فمثلاً في الفصل (١-١) نجد أن سعر بيع الوحدة من كل سلعة من السلع الثلاثة يتحدد وفقاً للسوق وتعتبر معطيات بالنسبة لمتخذ القرار. وبالتالي فأن سعر (أو متوسط سعر) بيع الوحدة يعتبر متغير تحكمي (معلمة). كذلك تكلفة إنتاج الوحدات التي يتم إنتاجها فأنها تتحدد أيضاً وفقاً للسوق وبالتالي تعتبر معطيات أيضا لمتخذ القرار.

ثالثاً: القيود Constraints (Restrictions)

والقيود هي عبارة عن الإمكانيات المتاحة للنظام (المشكلة) محل الدراسة وعادة يتم التعبير عنها في صورة دوال ومعادلات أو متباينات رياضية في المتغيرات القرارية والمتغيرات التحكمية.

رابعاً: دوال الأهداف Objective Functions

ودوال الأهداف هي عبارة عن مقاييس Measures توضح مدى فاعلية (أو كفاءة) النظام ويتم التعبير عنها في صورة دوال رياضية Mathematical Function في المتغيرات القرارية والمتغيرات التحكمية.

وسوف نوضح في الأبواب التالية كيفية تحديد كل من المتغيرات القرارية والتحكمية والقيود ، والأهداف بالنسبة لكل أسلوب من أساليب بحوث العمليات التي سوف يتم تقديمها.

(١-٥) متطلبات لبحوث العمليات Prerequisite for O. R.

وكما سبق أن أوضحنا في هذا الباب ، أن استخدام وتطبيق أساليب بحوث العمليات يتطلب العمل بنظام الفريق من المختصصين في الرياضيات Mathematics ، والإحصاء Statistics ، وبرمجة الحاسب Computer Programming ، ...... الخ.

وفى هذا الفصل سوف نحدد باختصار بعض الموضوعات الهامة Important Topics في كل من الرياضيات والإحصاء التي يجب الإلمام الجيد بها عند تناول وتطبيق أساليب بحوث العمليات.

<u>أولاً: بعض الموضوعات في الرياضيات</u>

- الفئات والدوال الرياضية Sets And Mathematical Functions
- المصفوفات والمحددات Matrices and Determinants
- المتجهات Vectors
- الجبر الخطى Linear Algebra
- الفئات المحدبة Convex Sets

وفى ملحقي رقم (A),(B) سوف نقدم أهم التعريفات والمفاهيم الأساسية. المرتبطة بهذه الموضوعات بالإضافة لبعض الأمثلة التوضيحية البسيطة.

<u>ثانيا: بعض الموضوعات الاحصائية</u>

- جمع وتحليل البيانات Collecting and Analysis Data
- العينات وخصائصها Samples and it's Properties

- الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية

Probabilities and Probability Distributions

- التقديرات Estimation
- اختبارات الفروض Testing of Hypotheses

وفى ملحق رقم (J) سوف نتناول أهم التعريفات والمفاهيم المرتبطة بهذه الموضوعات مع أعطاء بعض الأمثلة البسيطة.

ثالثاً: بعض البرامج الجاهزة Packages

ويتطلب استخدام أساليب بحوث العمليات في حل المشاكل ذات الحجم الكبير استخدام الحاسب ، وقد صممت حزم من البرامج الجاهزة لأساليب بحوث العمليات تستخدم لحل هذه المشاكل ومنها حزمة TORA ، حزمة Maple ، حزمة Quick Quant ،...الخ.

وفى ملحق رقم (E) سوف نقدم باختصار كيفية استخدام حزمة TORA، وملحق رقم (F) سوف يقدم باختصار كيفية استخدام حزمة Maple.

(١-٦) استخدام بحوث العمليات Using O.R

تستخدم أساليب بحوث العمليات على نطاق واسع في الدول المتقدمة في معظم القطاعات مثل قطاع البنوك ، والنقل ، والصناعة ، والزراعة ...الخ، حيث يتطلب تطبيق هذه الأساليب على نطاق واسع ضرورة العمل بنظام الفريق بالإضافة إلى توافر البيانات المطلوبة.

وعلى العكس من ذلك بالنسبة للدول غير المتقدمة ، فنجد أن استخدام وتطبيق أساليب بحوث العمليات يكون على نطاق ضيق جداً ، ويرجع ذلك لافتقار هذه الدول للعمل بنظام الفريق ، بالإضافة إلى عدم توافر البيانات بالكيفية المطلوبة (أي بعد تحويلها إلى معلومات Information ثم إلى معرفة Knowledge*) لتطبيق أساليب بحوث العمليات.

واستخدام أحد أساليب بحوث العمليات أو أكثر فى حل أحدى المشاكل ، يتطلب ذلك المرور بالمراحل التالية :

المرحلة الأولى : ١- تحديد عناصر المشكلة وأسبابها والأهداف المباشرة وغير المباشرة المراد تحقيقها ، وفقاً للأولويات المحددة.

٢- جمع البيانات عن عناصر المشكلة(المتغيرات محل الدراسة) وتحديد العلاقات المباشر وغير المباشر بين العناصر.

وبالتالي الحصول على صورة رقمية تعطى رؤية رقمية دقيقة للمشكلة. وبذلك تتوقف صحة ودقة الرؤية الرقمية للمشكلة على صحة ودقة وشمول البيانات[٩].

---

*عفاف الدش (٢٠١٠): الإحصاء التطبيقي – الجزء الثاني الاستدلال الإحصائي – جهاز نشر وتوزيع الكتاب – جامعة حلوان – مصر

المرحلة الثانية : ١- عرض البيانات التي تم جمعها في المرحلة الأولى بأساليب ملائمة توضح ما تنطوي علية هذه البيانات من خصائص للعناصر (المتغيرات) والعلاقات بين هذه العناصر بصورة رقمية واضحة ومفهومة.

٢-تحليل البيانات التي تم جمعها بالأساليب الملائمة لطبيعة المشكلة ووفقاً للأهداف المراد تحقيقها.

٣- التنبؤ والتوقع بقيم بعض عناصر المشكلة (بعض أو كل المعلمات) واختبارها بالأساليب الإحصائية الملائمة.

المرحلة الثالثة : بناءً على المعرفة الرقمية **Numerical Knowledge** التي تم تكوينها في المراحل السابقة عن المشكلة يتم :

١- تحديد أسلوب أو أكثر من أساليب بحوث العمليات الموجودة حالياً لاستخدامه .

٢- في حالة عدم ملائمة أساليب بحوث العمليات الموجودة حالياً لطبيعة المشكلة محل الدراسة فإنه يجب تطوير أحد الأساليب الموجودة أو أكثر لتتوائم مع المشكلة محل الدراسة.

المرحلة الرابعة : ولتطبيق أحد أساليب بحوث العمليات يتطلب ذلك :

١-بناء نموذج رياضي يمثل المشكلة.

٢-حل النموذج باستخدام الطرق المتاحة للحل سواء يدوياً أو باستخدام برامج الحاسب **Packages** وإيجاد حلول هذا النموذج وتحديد الحل الأمثل **Optimum Solution** من بين هذه الحلول.

٣-دراسة تأثير حدوث أي تغير في المشكلة على الحل الأمثل الذي تم الحصول عليه في الخطوة السابقة.

٤-تنفيذ الحل باستخدام أسلوب أو أكثر من أساليب بحوث العمليات أو الأساليب الأخرى.

ومما سبق يتضح أن أستخدام أسلوب أو أكثر من أساليب بحوث العمليات لحل أحدى المشاكل يتطلب ذلك:

أ- الإلمام الجيد بطرق تحليل النظم **System Analysis** لتحديد عناصر وأسباب المشكلة وتحديد الأهداف المرجوة.

ب-الإلمام الجيد بالطرق والأساليب الإحصائية لجمع وعرض وتحليل البيانات، وأساليب الاستدلال الإحصائي (التقديرات **Estimation** واختبارات الفروض **Testing of Hypothesis**).

ج- الإلمام الجيد بالأساليب والطرق الرياضية المبنى عليها أساليب بحوث العمليات حتى يمكن تطبيق هذه الأساليب تطبيق كفء بالإضافة إلى إمكانية تطويعها وفقاً لطبيعة المشكلة.

د- الإلمام الجيد باستخدام الحاسب واستخدام حزم بحوث العمليات الجاهزة كذلك الإلمام بلغات برمجة الحاسب، حيث أن حل المشاكل ذات الحجم الكبير يتطلب ضرورة استخدام الحاسب في تطبيق أساليب بحوث العمليات.

(١-٧) تمرينات Exercises

(١-١) عرف كل مما يلي مع أعطاء مثال لكل بند من البنود التالية:

أ- النموذج
ب- المتغيرات السائدة
ج- المتغيرات القرارية
د- المتغيرات التحكمية
هـ-القيود
و- الأهداف
ل- بحوث العمليات

(١-٢) ما دور الإحصاء في استخدام أساليب بحوث العمليات.

(١-٣) ما هي المراحل المطلوبة لاستخدام أحد أساليب بحوث العمليات فى حل أحدى المشاكل .

(١-٤) تكلم باختصار عن أنواع نماذج بحوث العمليات.

(١-٥) وضح كيف تساعد أساليب بحوث العمليات في صناعة القرار.

(١-٦) ناقش باختصار الخطوات المتتالية المختلفة المطلوبة في حل المشكلة باستخدام أحد أساليب بحوث العمليات.

(١-٧) أذكر بعض النماذج المختلفة لأساليب بحوث العمليات.

(١-٨) هل يوجد حزم برامج جاهزة لحل نماذج بحوث العمليات ؟ أذكر أهمها.

(١-٩) ما هو النموذج وما هي الأنواع المختلفة للنماذج؟

(١-١٠) تكلم باختصار عن المراحل المتتالية لصناعة القرار. وما هي أهم العلوم المرتبة بها؟

(١-١١) ما هو القرار؟

(١-١٢) تقوم إحدى شركات تعبئة زجاجات المياه الغازية بإنتاج 3 أحجام من الزجاجات A ($\frac{1}{4}$لتر)، B ($\frac{1}{2}$لتر)، C (لتر).
وترغب الشركة في تحديد عدد الزجاجات التي يجب إنتاجها من كل حجم بحيث يكون إجمالي التكاليف أقل ما يمكن. ويتم تغطية الطلب المحلي على الأقل.

المطلوب: ١- ما هي البيانات المطلوبة لدراسة المشكلة.
٢- تحديد العناصر المختلفة للمشكلة.

(١-١٣) ترغب إحدى شركات النقل البري داخل مدينة القاهرة في تحديد عدد الأتوبيسات التي تعمل على 3 خطوط A,B,C، حيث يعمل الأتوبيس ورديتين متتاليتين الوردية الأولي من 6 صباحاً حتى 12 ظهراً، ثم من 12 ظهراً إلى 6 مساءاً. حيث يستوعب الأتوبيس الواحد 100 راكب. وترغب الشركة في تحديد عدد الأتوبيسات على كل خط بحيث يتم استيعاب جميع الركاب كذلك تشغيل أقل عدد ممكن من الأتوبيسات على كل خط.

المطلوب: ١- ما هي البيانات المطلوبة لدراسة المشكلة.
٢- تحديد العناصر المختلفة للمشكلة.
٣- صياغة أهداف الشركة.

الباب الثاني

نماذج البرمجة الخطية

Linear Programming (L P) Models

(٢-١) مشاكل البرمجة الخطية — L P Problems

(٢-٢) مكونات نموذج البرمجة الخطية

Components of L P Model

(٢-٣) بناء النموذج — Structure of the Model

(٢-٤) الصياغة العامة للنموذج

General Formulation of the Model

(٢-٥) تحويل بعض النماذج غير الخطية إلى نماذج خطية

Transformations Some Nonlinear Models to Linear Models

(٢-٦) تمرينات — Exercises

(٢-١) مشاكل البرمجة الخطية

Linear Programming Problems

مشاكل البرمجة الخطية هي المشاكل التي يمكن التعبير عنها رياضياً Mathematical Form في صورة علاقة خطية، كما سوف نوضح ذلك بالتفصيل فيما بعد.

ويعتبر أسلوب البرمجة الخطية L P Technique أحد أساليب البرمجة الرياضية Mathematical Programming والذي يمكن استخدامه للحصول على الحلول المثلي Optimum Solutions لمشاكل البرمجة الخطية. واستخدام أسلوب البرمجة الخطية يمكن متخذ القرار من استخدام الإمكانيات المتاحة أفضل استخدام وفقاً للهدف المطلوب تحقيقه.

وترجع نشأت أسلوب البرمجة الخطية إلى الحرب العالمية الثانية (سنة ١٩٤٠م) كأحد أساليب الأمثلة Optimization Techniques التي نشأت خلال الحرب العالمية حيث استخدم أسلوب البرمجة الخطية في تحديد أفضل استخدام ممكن للمعدات الحربية المتاحة، ولكن يعتبر أول من أطلق أسم البرمجة الخطية على هذا الأسلوب هو العالم جورج ستيجر Gorge Stiegier سنة ١٩٤٥م، عندما استخدم هذا الأسلوب في دراساته الاقتصادية. فقد استخدم هذا الأسلوب في تحديد الحد الأدنى للنفقات اللازمة للإنسان للحصول على الكميات الكافية لحياته والمكونة من 9 مكونات غذائية أساسية (بروتين، فيتامينات، ... الخ) يحصل عليها من 77 مادة غذائية كانت متوفرة في الأسواق في ذلك الوقت – حيث كان الهدف الرئيسي من الدراسة هو مقارنة غلاء المعيشة قبل الحرب العالمية الثانية وبعدها في أوربا [13].

وقادت هذه الدراسة العالم Gorge Stiegier إلى تسمية النموذج الرياضي المستخدم بالبرنامج الخطي Linear Program وحاول حل هذا النموذج بالطرق التي كانت معروفة في ذلك الوقت مثل طريقة لاجرانج Lagrungain Method. وتسمي هذه المشكلة التي قدمها Gorge Stiegier حالياً بمشكلة التغذية Nutrition Problem.

وفي سنة ١٩٤٧ أوجد العالم G. Dantzing طريقة عملية بسيطة سماها طريقة السمبلكس Simplex Method لحل النموذج الخطي ولم تنشر هذه الطريقة إلا في عام ١٩٥١م، وقد حدثت تطورات عديدة لطريقة السمبلكس بحيث تتلاءم مع النماذج الخطية للمشاكل الإدارية والاقتصادية المعقدة التي ظهرت بعد الحرب العالمية الثانية، لذا قدمت خوارزميات متعددة تستخدم لحل النماذج الخطية المختلفة ولكنها جميعها تعتمد على طريقة السمبلكس [44]. وتعتبر البرمجة الخطية من أهم أساليب البرمجة الرياضية وأساليب الأمثلة بشكل عام وذلك لما يأتي:-

١- أهمية المشاكل التطبيقية التي يمكن صياغتها وحلها باستخدام البرمجة الخطية - وبصفة خاصة بعد تطور علوم الحاسبات وتخزين البيانات والمعلومات مما أدي إلى استخدام هذا الأسلوب في حل المشاكل ذات الحجم الكبير Large-Scale Problems في قطاع تكرار البترول [52]، قطاع البنوك [٧]، قطاع الإنتاج الصناعي [55]، ... الخ.
٢- تلعب البرمجة الخطية دور هام بالنسبة لأساليب البرمجة الأخرى مثل البرمجة غير الخطية Nonlinear Programming أو البرمجة العشوائية Stochastic Programming أو برمجة تعدد الأهداف Multi-objectives Programming حيث يتم تحويل المشاكل غير الخطية في مرحلة أو أخرى لحلها إلى برمجة خطية في معظم الحالات.

(٢-٢) مكونات نموذج البرمجة الخطية
Components of Linear Programming Model

وكما ذكرنا سابقاً في الفصل (١-٤) أن النموذج هو الصياغة الرياضية للمتغيرات (أو العناصر) السائدة للمشكلة والتي تسمي في نموذج البرمجة الخطية بالمتغيرات القرارية Decisions Variables أي المتغيرات المطلوب اتخاذ قرار بشأنها أي تحديد قيمها والمتغيرات التحكمية (المعلمات). كذلك يتكون من العلاقات بين هذه المتغيرات وتسمي في نموذج البرمجة الخطية بالقيود الهيكلية. ويتميز نموذج البرمجة الخطية بأن القيود الهيكلية قيود خطية أيضاً كذلك يتكون من دالة خطية في المتغيرات القرارية تسمى بدالة الهدف.

ومما سبق يمكن تحديد مكونات نموذج البرمجة الخطية على النحو التالي:-

- متغيرات قراريه غير سالبة (أو ممكن تحويلها إلى متغيرات غير سالبة Non-negative Variables).
- دالة هدف خطية أي صياغة الهدف كدالة خطية في المتغيرات القرارية يكون المطلوب تعظيمها أو تصغيرها.
- قيود Constraints في شكل متباينات خطية أو معادلات خطية في المتغيرات القرارية.
- معلمات Parameters وهي متغيرات تحكمية Control Variables تؤثر في المشكلة ولكن لا دخل لمتخذ القرار في تحديد تأثير هذه المتغيرات على المشكلة (النظام System) ولكن تعطى كمعطيات.

وبالتالي يتطلب صياغة المشكلة محل الدراسة في شكل نموذج برمجة خطية أن يتوافر الشروط التالية:-

١- أمكانية التعبير عن المتغيرات السائدة، أي العناصر الرئيسية للمشكلة في شكل متغيرات قراريه غير سالبة.

٢- أمكانية التعبير عن العلاقات بين المتغيرات القرارية والمعلمات في صورة قيود خطية في المتغيرات القرارية تأخذ شكل المتباينات الخطية **Linear Inequalities** أو معادلات خطية **Linear Equations** أو خليط منهما - حيث تسمي هذه القيود بالقيود الهيكلية **Structural Constraints**.

٣- أمكانية التعبير عن الهدف المطلوب في صورة دالة خطية **Linear Function** في المتغيرات القرارية وإمكانية أيجاد نهاية عظمي **Maximum Point** أو نهاية صغري **Minimum Point** لهذه الدالة وتسمي هذه الدالة بدالة الهدف **objective Function**.

٤- يجب أن تكون المتغيرات القرارية متغيرات غير سالبة (أو ممكن تحويلها إلى متغيرات غير سالبة) - وتضاف إلى القيود الهيكلية وتسمي بقيود عدم السالبية **Non-Negative Constraints**.

فإذا توافرت في المشكلة محل الدراسة جميع الشروط المذكورة أعلاه، فإنه يمكن صياغتها في صورة نموذج برمجة خطية.

وسوف نوضح في الفصل التالي كيفية بناء نماذج البرمجة الخطية من خلال العديد من المشاكل [٥].

(٢-٣) بناء النموذج Structure of the Model

في هذا الفصل سوف نوضح كيفية بناء نماذج البرمجة الخطية من خلال مجموعة من الأمثلة التطبيقية في القطاعات الإنتاجية أو الخدمية [٥ ، ٦].

مثال (٢-١): تقوم احدي الشركات الصناعية بإنتاج نوعين من المنتجات A , B. وترغب الشركة في تحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها يومياً من كل نوع بحيث تحقق الشركة أكبر ربح ممكن، بحيث يتطلب إنتاج الوحدة الواحدة من كل نوع المرور على ثلاثة خطوط مختلفة للإنتاج I , II , III على الترتيب.

والجدول التالي يوضح الزمن المتاح للتشغيل اليومي في كل خط، كذلك الزمن المطلوب للوحدة الواحدة من كل منتج في كل خط، كذلك ربح الوحدة الواحدة من كل منتج.

والمطلوب: تحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من A , B بحيث تحقق الشركة أكبر ربح ممكن في ظل إمكانيات التشغيل اليومية في كل خط إنتاج.

ملحوظة: تمثل القيم بالجدول معلمات النموذج (أي المتغيرات التحكمية).

جدول (٢-١)

الوقت المتاح للتشغيل يومياً بالدقائق	الزمن المطلوب لكل وحدة في كل خط بالدقائق		خط الإنتاج
	B	A	
600	1	2	I
540	5	3	II
660	6	1	III
	7	4	ربح الوحدة بالجنيه

الحل: يمكن صياغة المشكلة السابقة في صورة نموذج برمجة خطية على النحو التالي:

١- تحديد المتغيرات القرارية:

إذا فرضنا أن المطلوب تحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها يومياً من المنتجين A , B ، لذا يمكن افتراض أن المتغيران X_1, X_2 يشيران إلى عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من A , B على الترتيب. حيث أن X_1, X_2 متغيرات غير سالبة أي أن:

$$X_1 \geq 0 \quad , \quad X_2 \geq 0 \qquad (1)$$

حيث تشير القيود في (1) إلى شروط عدم السالبية.

٢- تحديد دالة الهدف:

بما أن هدف الشركة تحقيق أكبر ربح ممكن **Maximum Profit**، فإذا فرضنا أن Z تشير إلى ربح الشركة فإن:

$$Z = f(X_1, X_2) = 5X_1 + 7X_2$$

وبالتالي يصبح هدف الشركة إيجاد قيم X_1, X_2 التي تجعل الدالة $f(X_1, X_2)$ نهاية عظمي. أي إيجاد X_1, X_2 بحيث:

$$\text{Maximize } Z = 5X_1 + 7X_2 \qquad (2)$$

٣- القيود الهيكلية:

في هذا المثال نجد أن الهدف (2) يخضع للإمكانيات المتاحة للشركة بالنسبة لزمن التشغيل في خطوط الإنتاج I , II , III.

فبالنسبة لخط الإنتاج I نجد أن:

$$2X_1 + 1X_2 \le 600 \quad (3)$$

وبالنسبة لخط الإنتاج II نجد أن:

$$3X_1 + 5X_2 \le 540 \quad (4)$$

وبالنسبة لخط الإنتاج III نجد أن:

$$1X_1 + 6X_2 \le 660 \quad (5)$$

من (5)-(1) يمكن كتابة نموذج البرمجة الخطية للمشكلة السابقة على النحو التالي:

أوجد قيم X_1, X_2 بحيث:

$$\begin{aligned} \text{Maximize } Z &= 5X_1 + 7X_2 \\ \text{Subject to } \quad & 2X_1 + X_2 \le 600 \\ & 3X_1 + 5X_2 \le 540 \\ & X_1 + 6X_2 \le 660 \\ & X_1, X_2 \ge 0 \end{aligned}$$

مثال (٢-٢): تقوم أحدى المطاعم بإنتاج 4أنواع من الوجبات السريعة A , B , C , D يدخل في تكوين كل وجبة ثلاث أنواع من المكونات الرئيسية البروتين، الخضروات، الدقيق I , II , III.

والجدول التالي يوضح الكميات اليومية المتاحة بالكيلوجرام من كل مكون خلال شهر، والنسبة المئوية للمكون في الوحدة الواحدة من كل وجبة، كذلك سعر بيع الوحدة بالجنية، كذلك وزن كل وجبة يساوي كيلو جرام واحد.

جدول (٢-٢)

المكونات	النسبة المئوية (%) المطلوبة من كل مكون لإنتاج الوحدة في الوجبة الواحدة من كل وجبة (نسبة المكون)				الكميات الشهرية بالكيلوجرام
	A	B	C	D	
I بروتين	15	27	33	38	3000
II خضروات	35	13	27	20	5000
III دقيق	50	60	40	42	9000
سعر بيع الوحدة بالجنية	50	55	70	65	

ويرغب متخذ القرار في المطعم تحديد عدد الوجبات التي يجب إنتاجها من كل نوع بحيث تكون الإيرادات الإجمالية أكبر ما يمكن.

ملحوظة: المعلومات في الجدول تعتبر معلمات في النموذج.

الحل:

١- المتغيرات القرارية:

إذا فرضنا أن X_1, X_2, X_3, X_4 هي عدد الوجبات التي يجب إنتاجها من A , B , C , D على الترتيب خلال الشهر، حيث:

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \qquad (1)$$

٢- دالة الهدف:

$$\text{Maximize } Z = 50X_1 + 55X_2 + 70X_3 + 65X_4 \qquad (2)$$

٣- القيود الهيكلية:

الكميات المطلوبة من المكون I:

$$0.15X_1 + 0.27X_2 + 0.33X_3 + 0.38X_4 \leq 3000 \qquad (3)$$

الكميات المطلوبة من المكون II:

$$0.35X_1 + 0.13X_2 + 0.27X_3 + 0.20X_4 \leq 5000 \qquad (4)$$

الكميات المطلوبة من المكون III:

$$0.50X_1 + 0.60X_2 + 0.40X_3 + 0.42X_4 \leq 9000 \qquad (5)$$

من (5)-(1) نجد أن نموذج البرمجة الخطية الذي يمثل المشكلة السابقة هو:

أوجد قيم X_1, X_2, X_3, X_4 بحيث:

$$\begin{aligned}
&\text{Max. } Z = 50X_1 + 55X_2 + 70X_3 + 65X_4 \\
&\text{Subject to } \; 0.15X_1 + 0.27X_2 + 0.33X_3 + 0.38X_4 \leq 3000 \\
&\qquad 0.35X_1 + 0.13X_2 + 0.27X_3 + 0.20X_4 \leq 5000 \\
&\qquad 0.50X_1 + 0.60X_2 + 0.40X_3 + 0.42X_4 \leq 9000 \\
&\qquad X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0
\end{aligned}$$

<u>مثال (٢-٣)</u>: تقوم أحدى شركات تجميع مكونات إنتاج منتج معين بإنتاج منتج نهائي واحد (ولتكن الغسالة الأتوماتيك 15برنامج) من خلال تجميع الوحدات المكونة للغسالة (ماتور، جسم الغسالة، المكون الكهربائي) حيث تتكون الوحدة الواحدة من هذا المنتج (الغسالة) من 3 أجزاء المختلفة السابقة. وتقوم الشركة من خلال خط تجميع واحد بتجميع 3 وحدات من المكونات المختلفة لتكوين وحدة واحدة من المنتج النهائي.

والجدول التالي يعطي عدد ساعات العمل الأسبوعية المتاحة لكل قسم يقوم بإنتاج المكونات الثلاثة ومعدلات الإنتاج لكل جزء خلال الأسبوع.

وتهدف الشركة إلى تحديد عدد ساعات العمل الأسبوعية في كل قسم من أقسام الإنتاج لإنتاج كل مكون (جزء) بحيث تكون عدد الوحدات المنتجة من المنتج النهائي أكبر ما يمكن. أو بعبارة أخري أن تكون عدد الوحدات غير المجمعة نتيجة وجود عجز في جزء أو أكثر أقل ما يمكن.

جدول (٢-٣)

عدد ساعات العمل المتاحة أسبوعياً	عدد الوحدات المنتجة من كل مكون في الساعة (معدلات الإنتاج)			القسم
	مكون C المكون الكهربائي	مكون B جسم الغسالة	مكون A الماتور	
100	10	5	8	1
80	4	12	6	2

الحل:

١ - المتغيرات القرارية:

إذا فرضنا أن (i) تشير إلى رقم القسم أي $i = 1,2$ ، j تشير إلى رقم المكون حيث $j = 1,2,3$ ، كذلك إذا فرضنا أن X_{ij} تشير إلى عدد ساعات العمل في القسم i لإنتاج المكون j، حيث:

$$X_{ij} \geq 0 \quad , \quad i = 1,2 \quad , \quad j = 1,2,3 \qquad (1)$$

٢- القيود الهيكلية:

بما أن عدد ساعات العمل المتاحة للقسم الأول تساوي 100 ساعة بالتالي:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 100 \qquad (2)$$

بالمثل بالنسبة للقسم الثاني:

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 80 \qquad (3)$$

٣- دالة الهدف:

بما أن عدد الوحدات المنتجة من المكونات الثلاثة هي:

المكون الأول: $8X_{11} + 6X_{21}$ (4)

المكون الثاني: $5X_{12} + 12X_{22}$ (5)

المكون الثالث: $10X_{13} + 4X_{23}$ (6)

وبما أن الغسالة الواحدة تتطلب وحدة من كل مكون، بالتالي فإن العدد الكلي للوحدات المنتجة (الغسالات المنتجة) سوف يكون أقل عدد من الوحدات المنتجة من كل مكون (فمثلاً إذا كان المتاح من الأجزاء الثلاثة 180 , 100 , 120 فإن عدد الوحدات من المنتج النهائي سوف تساوي 100 وحدة فقط) أو بالتالي فإن عدد الوحدات من المنتج النهائي من (6)-(4) يساوي:

$$\text{Minimize}\ \{\underbrace{(8X_{11} + 6X_{21})}_{\text{المكون الأول}}, \underbrace{(5X_{21} + 12X_{22})}_{\text{المكون الثاني}}, \underbrace{(10X_{13} + 4X_{23})}_{\text{المكون الثالث}}\} \qquad (7)$$

من (7)-(1) نجد أن النموذج الرياضي الذي يمثل المشكلة على النحو التالي:

أوجد X_{ij} ، $j=1,2,3$, $i=1,2$ بحيث:

$$\text{Max.}Z = \text{Min.}\{(8X_{11}+6X_{21}),(5X_{21}+12X_{22}),(10X_{13}+4X_{23})\} \quad (8)$$

$$\text{Subject to} \quad X_{11}+X_{12}+X_{13} \le 100 \quad (9)$$

$$X_{21}+X_{22}+X_{23} \le 80 \quad (10)$$

$$X_{ij} \ge 0 \quad , \quad i=1,2 \quad , \quad j=1,2,3 \quad (11)$$

ونلاحظ أن النموذج (11)-(8) نموذج غير خطي حيث أن دالة الهدف في (8) دالة غير خطية، ولكن يمكن تحويلها إلى دالة خطية، وبالتالي تحويل النموذج إلى نموذج خطي على النحو التالي:

إذا أشرنا إلى عدد الغسالات أي عدد الوحدات من المنتج النهائي بالرمز y حيث $y \ge 0$ فإن:

$$y = \text{Min.}\{(8X_{11}+6X_{21}),(5X_{21}+12X_{22}),(10X_{13}+4X_{23})\}$$

أو بعبارة أخري:

$$8X_{11}+6X_{21} \ge y \quad (12)$$

$$5X_{12}+12X_{22} \ge y \quad (13)$$

$$10X_{13}+4X_{23} \ge y \quad (14)$$

وبأخذ المتباينات (14)-(12) في الاعتبار فإنه يمكن تحويل النموذج غير الخطي (11)-(8) إلى نموذج برمجة خطية على النحو التالي:

$$\text{Max. } Z = y \qquad (15)$$

$$\text{S.T.} \quad 8X_{11} + 6X_{21} - y \geq 0 \qquad (16)$$

$$5X_{12} + 12X_{22} - y \geq 0 \qquad (17)$$

$$10X_{13} + 4X_{23} - y \geq 0 \qquad (18)$$

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 100 \qquad (19)$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 80 \qquad (20)$$

$$y \geq 0, X_{ij} \geq 0 \quad , \quad i = 1,2 \quad , \quad j = 1,2,3 \qquad (21)$$

<u>ملحوظة (١)</u>:

أ- النموذج الذي يمثل المشكلة في (11)-(8) نموذج برمجة غير خطية، حيث دالة الهدف غير خطية.

ب-النموذج المكافئ المحول في (21)-(15) نموذج برمجة خطية مكافئ للنموذج الأصلي في (11)-(8). وهنا يعني التكافؤ أن الحل الأمثل للنموذج (21)-(15) مكافئ للحل الأمثل للنموذج (11)-(8).

ج- حجم النموذج الأصلي في (11)-(8) عبارة عن 6 متغيرات قراريه، و 2 قيد هيكلي إي حجمه (2×6). أما النموذج المحول في (21)-(15) فإن حجمه (5×7) أي يتكون من 7 متغيرات قراريه، 5 قيود هيكلية، أي أن عملية التحويل أدت إلى زيادة حجم النموذج.

<u>ملحوظة (٢)</u>: المثال السابق بالنسبة لتجميع المنتج النهائي ممكن أن ينطبق على تجميع الأجهزة الأخرى مثل التليفزيون، الثلاجات، السيارات، التكيفات، ... الخ.

مثال (٢-٤): في أحدى المدن الجامعية، يرغب المسئول عن إعداد الوجبات الغذائية للطلاب في تحديد كميات المواد الغذائية في الوجبة، بحيث تتكون الوجبة للطالب من ثلاثة مواد غذائية خضروات (A_1)، ونشويات (A_2)، ولحوم (A_3)، حيث تحتوى كل مادة من المواد A_1, A_2, A_3 على 3 عناصر ضرورية هي البروتين (B_1)، والكالسيوم (B_2)، والألياف (B_3).

والجدول التالي يوضح الكميات الموجودة من كل عنصر في الكيلوجرام الواحد من كل مادة غذائية.

جدول (٢-٤)

العناصر / المواد	نسبة العنصر في الوحدة الواحدة من المادة			متوسط سعر الكيلوجرام بالجنية
	بروتين B_1	كالسيوم B_2	ألياف B_3	
A_1 خضروات	0.020	0.05	0.50	4
A_2 نشويات	0.030	0.05	0.04	5
A_3 لحوم	0.50	0.10	0.25	50

فإذا فراضنا أن الوجبة التي تعطى للطالب تتطلب الحصول على الأقل 0.250 كيلوجرام بروتين، 0.180 كيلوجرام كالسيوم، 0.80 كيلوجرام ألياف.

وتصبح مشكلة المسئول هي تحديد الكميات التي يجب أن تحتويها الوجبة من الخضروات A_1، والنشويات A_2، واللحوم A_3 بحيث تكون متوسط تكلفة الوجبة أقل ما يمكن.

الحل: يمكن صياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يمثل المشكلة على النحو التالي:

١- المتغيرات القرارية:

إذا فرضنا أن X_1, X_2, X_3 هي الكميات التي يجب توافرها في الوجبة من A_1, A_2, A_3 بالكيلو جرام بحيث تحقق المطلوب من كل عنصر B_1, B_2, B_3 وبتكلفة أقل ما يمكن، حيث:

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0 \qquad (1)$$

٢- دالة الهدف:

يصبح الهدف هو أن تكون التكلفة أقل ما يمكن. أي:

$$\text{Minimize } Z = 4X_1 + 5X_2 + 50X_3 \qquad (2)$$

٣- القيود الهيكلية:

أ) القيد المتعلق بالبروتين:

$$0.02X_1 + 0.030X_2 + 0.50X_3 \geq 0.25 \qquad (3)$$

ب) القيد المتعلق بالكالسيوم:

$$0.50X_1 + 0.05X_2 + 0.10X_3 \geq 0.18 \qquad (4)$$

ج) القيد المتعلق بالألياف:

$$0.50X_1 + 0.05X_2 + 0.25X_3 \geq 0.80 \qquad (5)$$

من (5)-(1) يصبح نموذج البرمجة الخطية على النحو التالي:

أوجد قيم X_1, X_2, X_3 بحيث:

$$\text{Min. } Z = 4X_1 + 5X_2 + 50X_3$$

$$\text{Subject to } \quad 0.02X_1 + 0.030X_2 + 0.50X_3 \geq 0.25$$

$$0.50X_1 + 0.05X_2 + 0.10X_3 \geq 0.18$$

$$0.50X_1 + 0.05X_2 + 0.25X_3 \geq 0.80$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

مثال (٢-٥): تعمل أحدى الكافيتريات بأحد المطارات 24 ساعة يومياً. ويرغب المسئول عن الكافيتريا في تحديد عدد العاملين في كل وردية خلال اليوم بافتراض أن العامل يعمل 8 ساعات متصلة فقط في اليوم. والجدول التالي يوضح عدد العاملين المطلوب في كل وردية وعدد الورديات (الوردية 4 ساعات متصلة).

جدول (٢-٥)

رقم الوردية	توقيت الوردية خلال اليوم	عدد العاملين المطلوب
1	12.00 : 4.00	4
2	4.00 : 8.00	8
3	8.00 : 12.00	10
4	12.00 : 4.00	7
5	4.00 : 8.00	12
6	8.00 : 12.00	4

الحل:

١- المتغيرات القرارية:

إذا فرضنا أن X_j ، $j = 1,2,3,4,5,6$ تشير إلى عدد العاملين في الوردية رقم (j) وبالتالي:

$$X_j \geq 0 \quad , \; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \qquad (1)$$

٢- الدالة الهدف:

المطلوب تقليل عدد العاملين في كل وردية بحيث تحقق العدد المطلوب في كل وردية وبالتالي:

$$\text{Min. } Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \qquad (2)$$

٣- القيود الهيكلية:

الوردية الأولي:

$$X_6 + X_1 \geq 4 \qquad (3)$$

الوردية الثانية:

$$X_1 + X_2 \geq 8 \qquad (4)$$

الوردية الثالثة:

$$X_2 + X_3 \geq 10 \qquad (5)$$

الوردية الرابعة:

$$X_3 + X_4 \geq 7 \qquad (6)$$

الوردية الخامسة:

$$X_4 + X_5 \geq 12 \qquad (7)$$

الوردية السادسة:

$$X_5 + X_6 \geq 4 \qquad (8)$$

ويصبح نموذج البرمجة الخطية على النحو التالي:

أوجد قيم X_j ، $j = 1,2,3,4,5,6$ بحيث:

$$\text{Min. } Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$$

$$\begin{aligned} \text{S.T.} \quad & X_6 + X_1 \geq 4 \\ & X_1 + X_2 \geq 8 \\ & X_2 + X_3 \geq 10 \\ & X_3 + X_4 \geq 7 \\ & X_4 + X_5 \geq 12 \\ & X_5 + X_6 \geq 4 \\ & X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0 \end{aligned}$$

ملحوظة: المثال السابق بالنسبة للعاملين في الكافيتريا ممكن أن ينطبق على:

أ- توزيع العاملين على ورديات العمل.

ب-توزيع الأتوبيسات والسائقين على ورديات العمل.

ج- توزيع الأطباء والممرضات على ورديات العمل بالمستشفيات.

مثال (٢-٦): تقوم أحدى شركات الأدوية بإنتاج 3 أنواع A , B , C من منتج معين يدخل في تصنيع كل منهم 4 أنواع من المواد المستخدمة في التصنيع I , II , III , IV ., والجدول التالي يوضح متطلبات العبوة الواحدة من كل نوع من المنتج A , B , C من كل مادة I , II , III , IV بالجرام.

جدول (٢-٦)

المادة	الكميات المطلوبة بالجرام من كل مادة لإنتاج العبوة الواحدة من كل نوع من المنتجات		
	A	B	C
I	0.20	0.11	0.15
II	0.50	0.81	0.25
III	0.40	0.75	0.27
IV	0.10	0.33	0.55
سعر بيع العبوة الواحدة بالجنية	23	27	32

ومن دراسة احتياجات السوق وجد أن السوق يحتاج من النوع A عدد من العبوات لا يزيد عن 50% مما يحتاج إليه من العبوات من النوع B. كذلك يحتاج السوق من النوع B عدد من العبوات نسبتها لا تقل عن 90% من عدد العبوات من النوع C. فإذا كانت الكميات المتاحة من المواد I , II , III , IV تساوي 200 , 500 , 700 , 300 بالكيلوجرام بالترتيب.

والمطلوب: بناء نموذج برمجة خطية يمكن باستخدامه تحديد الكميات التي يجب أنتاجها من A , B , C في ضوء الكميات المطلوبة من الأنواع والكميات المتاحة من المواد I , II , III , IV بحيث تكون إيرادات الشركة أكبر ما يمكن.

الحل:

١- المتغيرات القرارية:

إذا فرضنا أن X_1,X_2,X_3 هي عدد الوحدات (العبوات) التي يجب إنتاجها من A , B , C على الترتيب بالتالي فإن:

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$ (1)

٢- دالة الهدف:

$Max.\ Z = 23X_1 + 27X_2 + 32X_3$ (2)

٣- القيود الهيكلية:

$X_1 \leq 0.50X_2$ (3)

$X_2 \geq 0.90X_3$ (4)

$0.20X_1 + 0.11X_2 + 0.15X_3 \leq 300{,}000$ (5)

$0.50X_1 + 0.81X_2 + 0.25X_3 \leq 700{,}000$ (6)

$0.40X_1 + 0.75X_2 + 0.27X_3 \leq 500{,}000$ (7)

$0.10X_1 + 0.33X_2 + 0.55X_3 \leq 200{,}000$ (8)

من (8)-(1) يصبح نموذج البرمجة الخطية على النحو التالي:

أوجد قيم X_1, X_2, X_3 بحيث:

$$
\begin{aligned}
&Max.\ Z = 23X_1 + 27X_2 + 32X_3 \\
&S.T. \quad X_1 - 0.50X_2 \leq 0 \\
&\quad X_2 - 0.90X_3 \geq 0 \\
&\quad 0.20X_1 + 0.11X_2 + 0.15X_3 \leq 300{,}000 \\
&\quad 0.50X_1 + 0.81X_2 + 0.25X_3 \leq 700{,}000 \\
&\quad 0.40X_1 + 0.75X_2 + 0.27X_3 \leq 500{,}000 \\
&\quad 0.10X_1 + 0.33X_2 + 0.55X_3 \leq 200{,}000 \\
&\quad X_1, X_2, X_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

(٢-٤) الصياغة العامة للنموذج

General Formulation of the Model

من الفصول السابقة من هذا الباب يتضح أن الصياغة العامة لنموذج البرمجة الخطية تأخذ الصياغة التالية:

أوجد قيم $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ بحيث:

$$\text{Max. (or Min.) } Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots. + C_nX_n \quad (2.1)$$

$$\text{S.T.} \quad a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots.. + a_{1n}X_n \begin{matrix}\geq\\=\\\leq\end{matrix} b_1 \quad (2.2)$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots.. + a_{2n}X_n \begin{matrix}\geq\\=\\\leq\end{matrix} b_2 \quad (2.3)$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots.. + a_{mn}X_n \begin{matrix}\geq\\=\\\leq\end{matrix} b_m \quad (2.4)$$

$$X_j \geq 0 \quad , \quad j = 1,2,\ldots,n \quad (2.5)$$

حيث تشير a_{ij}, b_i, C_j ، $j = 1,2,\ldots,n$ ، $i = 1,2,\ldots,m$ إلى معلمات النموذج، ويمكن الحصول عليها أو تقديرها في شكل مقادير ثابتة Constants.

ويمكن كتابة النموذج (2.1)-(2.5) في صورة مصفوفات أيضاً على النحو التالي:

أوجد قيم عناصر المتجه X بحيث:

$$\text{Max. (or Min.) } Z = C\,X \qquad (2.6)$$

$$\text{S.T.} \qquad A\,X \begin{matrix} \ge \\ = \\ \le \end{matrix} b \qquad (2.7)$$

$$X \ge 0 \qquad (2.8)$$

حيث:

متجه عمودي $(n \times 1)$ تمثل عناصره المتغيرات القرارية : X

متجه عمودي $(m \times 1)$ تمثل عناصره القيم في الطرف الأيمن للقيود الهيكلية : b

متجه صفي $(1 \times n)$ تمثل عناصره معاملات المتغيرات القرارية في دالة الهدف : C

مصفوفة مستطيلة عدد صفوفها يساوي m وعدد أعمدتها n أي من الترتيب $(m \times n)$ وتمثل معاملات a_{ij} معامل المتغير القراري j في القيد رقم i (أنظر ملحق رقم A) : A

مثال (٢-٧): ضع نموذج البرمجة الخطية التالي في صورة مصفوفات:

$$\text{Max. } Z = 10X_1 - 21X_2 + 7X_3 - X_4$$

$$\text{S.T.} \quad 5X_1 + 7X_2 - 10X_3 - X_4 \le 10$$

$$3X_1 + 20X_3 + X_4 \ge 50$$

$$X_2 + 3X_3 - 7X_4 \le 100$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0$$

الحل:

$$C = \begin{bmatrix} 10 & -21 & 7 & -1 \end{bmatrix}_{1\times4}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}_{4\times1} \quad ، \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 50 \\ 100 \end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -10 & -1 \\ 3 & 0 & 20 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \end{bmatrix}_{3\times4}$$

(٢-٥) تحويل بعض النماذج غير الخطية إلى نماذج خطية

Transformations some Nonlinear Models to Linear Models

في كثير من الحالات عند صياغة بعض المشاكل في صورة نموذج رياضي، نجد أن النموذج الرياضي يتوافر فيه بعض شروط نموذج البرمجة الخطية، ولكن لا تتوافر فيه بعض الشروط لنموذج البرمجة الخطية الأخرى.

وفي بعض هذه النماذج يمكن تحويلها إلى نماذج برمجة خطية كما سوف نوضح في الأمثلة التالية. ومما هو جدير بالذكر هنا أنه في حالة إمكانية تحويل النموذج غير الخطي إلى نموذج برمجة خطية فإنه يكون من الأفضل تحويله إلى نموذج برمجة خطية وذلك يرجع إلى كفاءة طريقة حل نموذج البرمجة الخطية في الحصول على الحل الأمثل للنموذج بالمقارنة بالطرق والأساليب الأخرى كما سوف نوضح في الأبواب التالية.

مثال (٢-٨): أعتبر النموذج التالي:

أوجد قيم X_1, X_2, X_3 بحيث:

$$\text{Min. } Z = 3X_1 - 3X_2 + 7X_3 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 - 3X_3 \geq 40 \qquad (2)$$

$$X_1 + 9X_2 - 7X_3 \leq 50 \qquad (3)$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \quad , \quad X_3 \text{ متغير حقيقي} \qquad (4)$$

ضع النموذج السابق في صورة نموذج برمجة خطية

الحل:

من (4)-(1) نجد أن النموذج يحقق جميع شروط نموذج البرمجة الخطية باستثناء القيم رقم (4) حيث المتغير القراري X_3 متغير حقيقي وليس متغير غير سالب. وبالتالي لتحويل النموذج (4)-(1) إلى نموذج برمجة خطية هو تحويل المتغير الحقيقي X_3 إلى الفرق بين متغيرين غير سالبين وليكونا X_4, X_5 على النحو التالي:

$$X_3 = X_4 - X_5$$

حيث: $$X_4, X_5 \geq 0$$

وبالتالي يمكن إعادة صياغة النموذج السابق على النحو التالي:

أوجد قيم X_1, X_2, X_4, X_5 بحيث:

$$\text{Min. } Z = 3X_1 - 3X_2 + 7(X_4 - X_5) \qquad (5)$$

$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 - 3(X_4 - X_5) \geq 40 \qquad (6)$$

$$X_1 + 9X_2 - 7(X_4 - X_5) \leq 50 \qquad (7)$$

$$X_1, X_2, X_4, X_5 \geq 0 \qquad (8)$$

ملحوظة: يلاحظ أن حجم النموذج الأصلي قبل التحويل (2×3) أي يحتوي على 3 متغيرات قراريه، 2 قيد هيكلي. ولكن نتج عن عملية التحويل أن أصبح حجم النموذج (2×4) أي 4 متغيرات قراريه، 2 قيد هيكلي، أي زاد حجم النموذج.

مثال (٢-٩): أعتبر النموذج التالي:

$$\text{Max. } Z = 5X_1 + 4X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad |2X_1 - 4X_2| \leq 10 \qquad (2)$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \qquad (3)$$

صيغ النموذج أعلاه في صورة نموذج برمجة خطي.

الحل: من (3)-(1) نجد أن النموذج ينطبق عليه شروط البرمجة الخطية بخلاف القيد الهيكلي في (2). ويمكن تحويل القيد (2) إلى قيود خطية على النحو التالي:

$$|2X_1 - 4X_2| \le 10$$

مكافئ للقيدين التاليين:

$$+(2X_1 - 4X_2) \le 10 \longrightarrow 2X_1 - 4X_2 \le 10$$
$$-(2X_1 - 4X_2) \le 10 \longrightarrow 2X_1 - 4X_2 \ge -10$$

وبالتالي يصبح النموذج المحول على النحو التالي:

$$\text{Max. } Z = 5X_1 + 4X_2 \qquad (4)$$
$$\text{S.T.} \quad 2X_1 - 4X_2 \le 10 \qquad (5)$$
$$2X_1 - 4X_2 \ge -10 \qquad (6)$$
$$X_1, X_2 \ge 0 \qquad (7)$$

ملحوظة: حجم النموذج الأصلي (3)-(1) عبارة عن (1×2) وتحويله لنموذج برمجة خطية أصبح (2×2).

(٢-٦) تمرينات Exercises

(٢-١): أ- عرف النموذج الرياضي.

ب- عرف نموذج البرمجة الخطية.

ج- هل يمكن صياغة أي مشكلة في صورة نموذج برمجة خطية.

د- أذكر أسم العالم الذي قدم طريقة السمبلكس.

(٢-٢): تقوم أحدى شركات إنتاج أجهزة التليفونات المحمولة (الموبيلات) بإنتاج 3 أنواع بالسعات التالية:

النوع الأول (A) سعة 6150

النوع الثاني (B) سعة 6300

النوع الثالث (C) سعة 8000

من خلال خطي إنتاج منفصلين، الطاقة الإنتاجية اليومية للخطين 120 جهاز من (A)، 117 جهاز من (B)، 100 جهاز من (C). فإذا كانت معدلات الإنتاج اليومية للخط الأول 4 ، 5 ، 9 ساعات للأجهزة A , B , C على الترتيب، كذلك بالنسبة للخط الثاني 5 ، 9 ، 11 ساعات للأجهزة A , B , C على الترتيب. فإذا كان متوسط تكلفة الجهاز الواحد من النوع A هو 900جنيه ومتوسط سعر بيعه هو 1300جنيه، كذلك بالنسبة للنوع B هما 1500 , 1000، والنوع C هما 2500 , 5200 جنيه.

والمطلوب: صياغة المشكلة أعلاه في صورة نموذج (أو نماذج) برمجة خطية بحيث:-

١- تحديد عدد الأجهزة من كل نوع بحيث يكون الربح أكبر ما يمكن.

٢- تحديد عدد الساعات التي تخصص لإنتاج كل نوع بحيث يحقق أكبر ربح ممكن.

(٢-٣): تقوم أحدى شركات إنتاج التليفزيونات الملونة بإنتاج حجمين 20 بوصة، 26 بوصة، من خلال خطي إنتاج منفصلين، وكانت الطاقة الإنتاجية اليومية للخط الأول 60 تليفزيون 20 بوصة، والخط الثاني 75 تليفزيون 26 بوصة حيث يتطلب التليفزيون الواحد من مستلزمات الإنتاج المشتركة من الحجمين. 8 مكونات إذا كان التليفزيون 20 بوصة، 10 مكونات إذا كان التليفزيون 26 بوصة.

فإذا كان إجمالي عدد الوحدات من المكونات المتاحة اليومية 800 وحدة. فإذا كان ربح التليفزيون الواحد من الحجم 20 بوصة 200 جنيه ومن الحجم 26 بوصة 500 جنيه.

وترغب الشركة في تحديد عدد التليفزيونات التي يجب إنتاجها من كل حجم يومياً بحيث تحقق الشركة أكبر ربح ممكن.

(٢-٤): تقوم أحدى شركات صناعة الأثاث الخشب the wood furniture ومن ضمن منتجاتها تصنيع الترابيزات والكراسي من نفس نوع الخشب وبنفس أنواع العمالة.

والجدول التالي يوضح كمية الأخشاب المتاحة وعدد ساعات العمل المتاحة شهرياً وربح الشركة من الترابيزة الواحدة والكرسي الواحد بالجنية.

جدول (٢-٧)

متطلبات الإنتاج	متطلبات الوحدة الواحدة من كل منتج		الكميات المتاحة متطلبات الإنتاج
	ترابيزة	كرسي	
A_1 ألواح الخشب (بالمتر المربع)	7	4	2000
A_2 ساعات العمل المتاحة	5	8	250
الربح	450	200	

فإذا كانت نسبة عدد الترابيزات المطلوبة إلى عدد الكراسي المطلوبة واحد إلى 6 على الترتيب.

كون نموذج برمجة خطية مناسب لتحديد عدد الكراسي وعدد الترابيزات التي يتم إنتاجها بحيث يكون ربح الشركة أكبر ما يمكن.

(٢-٥): تقوم أحدى شركات إنتاج الزيوت (للطعام) بإنتاج النوعين A , B حيث يتطلب إنتاج الوحدة الواحدة من كل نوع المرور على 3 أنواع من الماكينات I , II , III , حيث أن الزمن الكلي المتاح للعمل على كل ماكينة يساوي 18 ساعة يومياً. والجدول التالي يوضح متطلبات الإنتاج لكل وحدة من كل نوع وكذلك ربح الوحدة الواحدة بالجنية.

جدول (٢-٨)

ربح الوحدة بالجنيه	الزمن المطلوب لإنتاج الوحدة الواحدة من كل نوع على الماكينة بالدقائق			المنتج
	III	II	I	
2	8	6	10	A
3	15	20	5	B

ويرغب متخذ القرار في تحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها يومياً من A , B بحيث يكون ربح الشركة أكبر ما يمكن.

(٢-٦): تقوم أحدى شركات إنتاج أزياء السيدات بإنتاج ثلاثة موديلات A , B , C من المعاطف الحريمي. حيث يتطلب إنتاج كل موديل عدد ساعات 7 , 3.5 , 5 على الترتيب مع أحدى الماكينات.

فإذا كان المتاح من ساعات عمل على هذه الماكينة خلال الأسبوع 100 ساعة أسبوعياً. وحددت الشركة سعر بيع المعطف من كل موديل بالجنية , 500 , 200 650 جنيه على الترتيب.

كذلك أشار قسم التسويق للشركة أن الطلب على الموديل A تمثل 55% على الأقل من إجمالي الطلب على B , C.

ويرغب متخذ القرار في الشركة تحديد عدد المعاطف من كل موديل A , B , C بحيث تكون إيرادات الشركة أكبر ما يمكن.

(٢-٧): في أحدى شركات إنتاج الأدوية، يتطلب إنتاج الأدوية A , B , C , D الدخول على الآلتين I , II. والجدول التالي يوضح الزمن المطلوب لكل وحدة من المنتجات A , B , C , D بالدقائق في كل آلة I , II. كذلك يوضح الجدول عدد الساعات الشهرية لساعات العمل المتاحة في كل آلة بالإضافة إلى تكلفة الساعة الواحدة على الآلة بالجنية، كذلك ثمن بيع الوحدة الواحدة من كل منتج A , B , C.

جدول (٢-٩)

الزمن الكلي المتاح على الآلة بالساعات	الزمن المطلوب لإنتاج الوحدة من كل منتج بالدقائق				تكلفة الساعة الواحدة على الآلة بالجنية	رقم الآلة
	D	C	B	A		
360	2	4	3	2	150	I
250	3	1	2	3	200	II
	20	55	47	25	سعر بيع الوحدة بالجنية	

ومن دراسة الطلب في السوق وجد أن احتياجات السوق من المنتج A لا يزيد عن 45% على الأقل من أجمالي المنتجات بشكل عام. كذلك لا يقل إنتاج المنتج C عن 30% ولا يزيد عن 65% من إجمالي المنتجات.

والمطلوب: صياغة المشكلة السابقة في شكل نموذج برمجة خطية بحيث يمكن تحديد العدد الأمثل للوحدات المنتجة من المنتجات A, B , C , D.

(٢-٨): تقوم أحدى شركات إنتاج المبردات بإنتاج ثلاثة أنواع بقدرات مختلفة للتبريد هي I , II , III بحيث يدخل في إنتاج كل نوع نوعين من المواد الخام A , B. والجدول التالي يوضح عدد الوحدات المطلوب من الخامات لإنتاج الوحدة الواحدة من كل نوع كذلك عدد الوحدات المتاحة من كل خام، ومعدلات الإنتاج وصافي ربح الوحدة الواحدة من كل منتج.

جدول (٢-١٠)

المواد الخام	عدد الوحدات المطلوب من المواد الخام لإنتاج المبرد الواحد من كل نوع			عدد الوحدات المتاحة من الخامات
	I	II	III	
A	2	3	5	40,000
B	4	2	7	60,000
صافي ربح الوحدة	300	350	400	

حيث أن جهاز التكيف الواحد من II يتطلب إنتاجه ضعف الوقت المطلوب لإنتاج الجهاز الواحد من النوع III. ويتطلب إنتاج الجهاز الواحد من IIIيتطلب ثلاثة أضعاف الزمن المطلوب لإنتاج الجهاز الواحد من النوع I. فإذا كان الزمن الكلي المتاح لتصنيع كل الأجهزة يكون لإنتاج 15000 جهاز من النوع II. وقد أظهرت دراسات السوق أن أقل طلب من الأنواع الثلاثة 150000 , 30000 , 20000 على الترتيب، على أن تكون نسبة عدد الأجهزة المنتجة 2:5:3 على الترتيب.

والمطلوب: صياغة المشكلة أعلاه كنموذج برمجة خطية بحيث تحقق الشركة أكبر ربح ممكن.

(٢-٩): رجل أعمال لدية إمكانيتين لاستثمار أمواله، الأولي تضمن أن كل جنيه سوف يكسب 0.70 من الجنيه بعد عام، والإمكانية الثانية تضمن له أن كل جنيه سوف يكسب 2جنيه بعد سنتين متتاليتين. حيث أن هذه الإمكانية تتيح الاستثمار لمدة عامين متتاليين أو مضاعفتهما فقط.

فإذا كان هذا المستثمر يرغب في استثمار 2مليون جنية لمدة 3 سنوات متتالية. ويرغب هذا المستثمر في تحديد المبلغ الذي يستثمره في كل إمكانية بحيث تحقق أكبر ربح ممكن.

المطلوب: بناء نموذج برمجة خطية يمكن باستخدامه تحديد المبلغ الذي يستثمره في كل إمكانية بحيث يحقق أكبر ربح ممكن.

(٢-١٠) تقوم أحدى شركات النقل الجامعي بتحديد عدد الأتوبيسات المطلوبة في الساعة رقم (i) على الخط (j) من اليوم.

فإذا كان أقل عدد من الأتوبيسات المطلوبة في الساعة (i) على أحد الخطوط (j) يساوي B_{ij} حيث $j = 1,2,3$ ، $i = 1,2,...,24$. ويعمل الأتوبيس مدة 8 ساعات متصلة. وزيادة عدد الأتوبيسات في الساعة (i) على الخط (j) عد العدد B_{ij} يؤدي إلى تحمل الشركة تكليفة قدرها C_{ij} عن الساعة الواحدة للأتوبيس.

وترغب الشركة في تحديد العدد الأمثل للأتوبيسات التي تعمل على الخط (j) خلال يوم عمل بحيث تكون تكلفة تشغيل الخطوط أقل ما يمكن.

(٢-١١): يعمل قسم الطوارئ بإحدى المستشفيات مدة 24 ساعة يومياً. والجدول التالي يوضح أقل عدد مطلوب من القائمين بالعمل من أطباء وممرضين بالخدمة في فترات اليوم المختلفة.

جدول (٢-١١)

أقل عدد ممكن من القائمين بالخدمة		الفترة	رقم الوردية
ممرضين	أطباء		
10	3	1-7	1
20	5	7-1	2
40	9	1-7	3
7	2	7-1	4

حيث يعمل كل من الطبيب أو الممرض 12 ساعة متصلة يومياً.

والمطلوب: تحديد أقل عدد ممكن من الأطباء والممرضين المطلوب طول اليوم.

(٢-١٢): حول كل من نماذج البرمجة الرياضية التالية إلى نموذج برمجة خطية:

(1) $\text{Max. } Z = 3X_1 + 4X_2$

$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 \le 100$$

$$|2X_1 - 9X_2| \ge 25$$

$X_1 \ge 0$, X_2 متغير حقيقي

(2) $\text{Min. } Z = \text{Max.}\{7X_1 - 2X_2, 5X_1 + 4X_2, 12X_1 - 5X_2\}$

$$\text{S.T.} \quad X_1, X_2 \ge 0$$

(3) $\text{Max. } Z = \text{Min. }\{|5X_1 - 2X_2|, |9X_1 + 4X_2|\}$

$$\text{S.T.} \quad X_1, X_2 \ge 0$$

(4) $\text{Min. } Z = \text{Max.}\left\{ \left| \sum_{j=1}^{n} C_{1j} X_j \right| , \left| \sum_{j=1}^{n} C_{2j} X_j \right| \right\}$

S.T. $X_j \geq 0 \quad , \quad j = 1,2,\ldots,n$

(5) $\text{Max. } Z = |5X_1 - 7X_2|$

S.T. $|4X_1 + 5X_2| \leq 10$

$X_1^2 + X_2^2 \geq 15$

$X_1, X_2 \geq 0$

(6) $\text{Min. } Z = \exp.\{ 3X_1 + 5X_2 + 3X_3 \}$

S.T. $X_1, X_2, X_3 \geq 0$

(7) $\text{Max. } Z = (10)^{X_1 + X_2 + X_3}$

S.T. $X_1, X_2, X_3 \geq 0$

(8) $\text{Max. } Z = |3X_1 - X_2| - 5X_3$

S.T. $2X_1 + X_2 + X_3 \leq 10$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

الباب الثالث

طرق حل نماذج البرمجة الخطية

Solution's Methods for Solving Linear Programming Models

(٣-١) طرق الحل المختلفة Different Solution's Methods

(٣-٢) طريقة الحل البياني Graphical solution method

(٣-٣) طريقة السمبلكس Simplex Method

(٣-٤) أسلوب الــM M-Technique

(٣-٥) أسلوب المرحلتين Two-Phase's Technique

(٣-٦) حالات خاصة Special Cases

(٣-٧) الحل باستخدام الحاسب (الحزم الجاهزة) Computer Solution

(٣-٨) التمرينات Exercises

(٣-١) طرق الحل المختلفة

Different Solutions Methods

وكما ذكرنا سابقاً أن أسلوب البرمجة الخطية linear programming Technique أحد أساليب بحوث العمليات الهامة. وفي الباب السابق تناولنا بالتفصيل كيفية بناء نماذج البرمجة الخطية linear programming models. وفي هذا الباب سوف نتناول بالتفصيل طرق حل نماذج البرمجة الخطية، وتتمثل هذه الطرق في:

- الطريقة البيانية Graphical solution method
- الطريقة الجبرية Algebraic method

أولاً: الطريقة البيانية

وتستخدم هذه الطريقة في حالة تضمن النموذج متغيرين قراريين على الأكثر. وبالتالي لا تصلح هذه الطريقة في حالة وجود أكثر من متغيرين قراريين.

وسوف نتناول هذه الطريقة بالتفصيل في الفصل التالي (٣-٢)، كذلك سوف نتناول الحل البياني باستخدام الحاسب الآلي في الفصل (٣-٧).

ثانياً: الطريقة الجبرية

وتسمى هذه الطريقة أيضاً بطريقة السمبلكس Simplex Method ، وكما ذكرنا سابقاً أن أول من قدم هذه الطريقة هو عالم الرياضيات Dantzing سنة١٩٤٧. وتستخدم هذه الطريقة في حالة وجود أكثر من متغيرين في نموذج البرمجة الخطية.

وسوف نتناول هذه الطريقة بالتفصيل في الحالات التالية:

١- عندما تكون جميع القيود الهيكلية في صورة متباينات خطية، الطرف الأيسر في كل منها أقل من أو يساوى (≤) الطرف الأيمن وفي نفس الوقت المقادير الثابتة في الطرف الأيمن قيم غير سالبة أي أن $b_i \geq 0$ لجميع قيم $i=1,2,\ldots,m$.

٢- عندما تكون القيود الهيكلية خليط من المتباينات والمعادلات، كذلك توجد بعض المتباينات الطرف الأيسر أكبر من أو أقل من أو يساوى الطرف الأيمن. في هذه الحالة يوجد أسلوبين لحل هذه النماذج باستخدام طريقة السمبلكس.

الأسلوب الأول: يسمى بأسلوب M **M-Technique**

الأسلوب الثاني: يسمى بأسلوب المرحلتين **Two-Phases Technique**

وبالإضافة إلى وجود كثير من المشاكل الممكن صياغتها كنماذج برمجة خطية ولكن يوجد لها بعض الخصائص الخاصة مثل مشكلتي النقل والتخصيص، لذلك فقد قُدمت العديد من الخوارزميات **algorithms** لطريقة السمبلكس يمكن باستخدامها حل نماذج البرمجة الخطية في الحالات المختلفة كما سوف نتناولها في هذا الباب والأبواب التالية.

ونظراً لصعوبة وتعقد العمليات الحسابية التي يتطلبها استخدام طريقة السمبلكس بالنسبة للمشاكل التطبيقية ذات الحجم الكبير **Large Scale problems**، فقد قدمت عديد من برامج الحاسب (الحزم الجاهزة) التي تستخدم في حل نماذج البرمجة الخطية ذات الحجم الكبير باستخدام طريقة السمبلكس.

وفي الفصل (٣-٧) من هذا الباب سوف نتناول بالتفصيل استخدام حزمة **TORA** لحل نماذج البرمجة الخطية سواء بيانياً أو باستخدام طريقة السمبلكس.

(٣-٢) طريقة الحل البياني Graphical Solution Method

وكما ذكرنا سابقا، أن الطريقة البيانية تستخدم فقط في حالة نماذج البرمجة الخطية التي تتضمن متغيرين قراريين على الأكثر. والهدف الأساسي من تقدم الطريقة البيانية في هذا الفصل هو تقديم وتناول بعض المفاهيم والتعريفات التي تعتبر مفاهيم وتعريفات أساسية في النظرية التي بُنيت على أساسها الطريقة الجبرية المسماة بطريقة السمبلكس والتي سوف نتناولها بالتفصيل في الفصول التالية من هذا الباب والباب الثامن.

وسوف نوضح الطريقة البيانية من خلال المثال التالي:

مثال (٣-١): أعتبر نموذج البرمجة الخطية التالي

أوجد قيم X_1,X_2 بحيث

$$\text{Max. } Z = 5X_1 + X_2 \quad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad 2X_1 + 3X_2 \le 6 \quad (2)$$

$$-3X_1 + 2X_2 \le 3 \quad (3)$$

$$2X_1 + X_2 \le 4 \quad (4)$$

$$X_2 \le 3 \quad (5)$$

$$X_1 , X_2 \ge 0 \quad (6)$$

الحل:

تبنى طريقة الحل البياني على تحديد المنطقة التي تحقق جميع القيود (الهيكلة وعدم السالبية) ثم تحديد النقطة التي تجعل دالة الهدف أكبر ما يمكن (أو أقل ما يمكن، وفقاً لطبيعة المشاكل) في هذه المنطقة .

ويمكن تحديد هذه المنطقة التي تحقق جميع القيود في شكل متباينات معاً من (6) – (2) على النحو التالي:

١- تحويل القيود التي في صورة متباينات إلى متساويات (معادلات) تأخذ الشكل التالي

$$2X_1 + 3X_2 = 6 \quad (7)$$

$$-3X_1 + 2X_2 = 3 \quad (8)$$

$$2X_1 + X_2 = 4 \quad (9)$$

$$X_2 = 3 \quad (10)$$

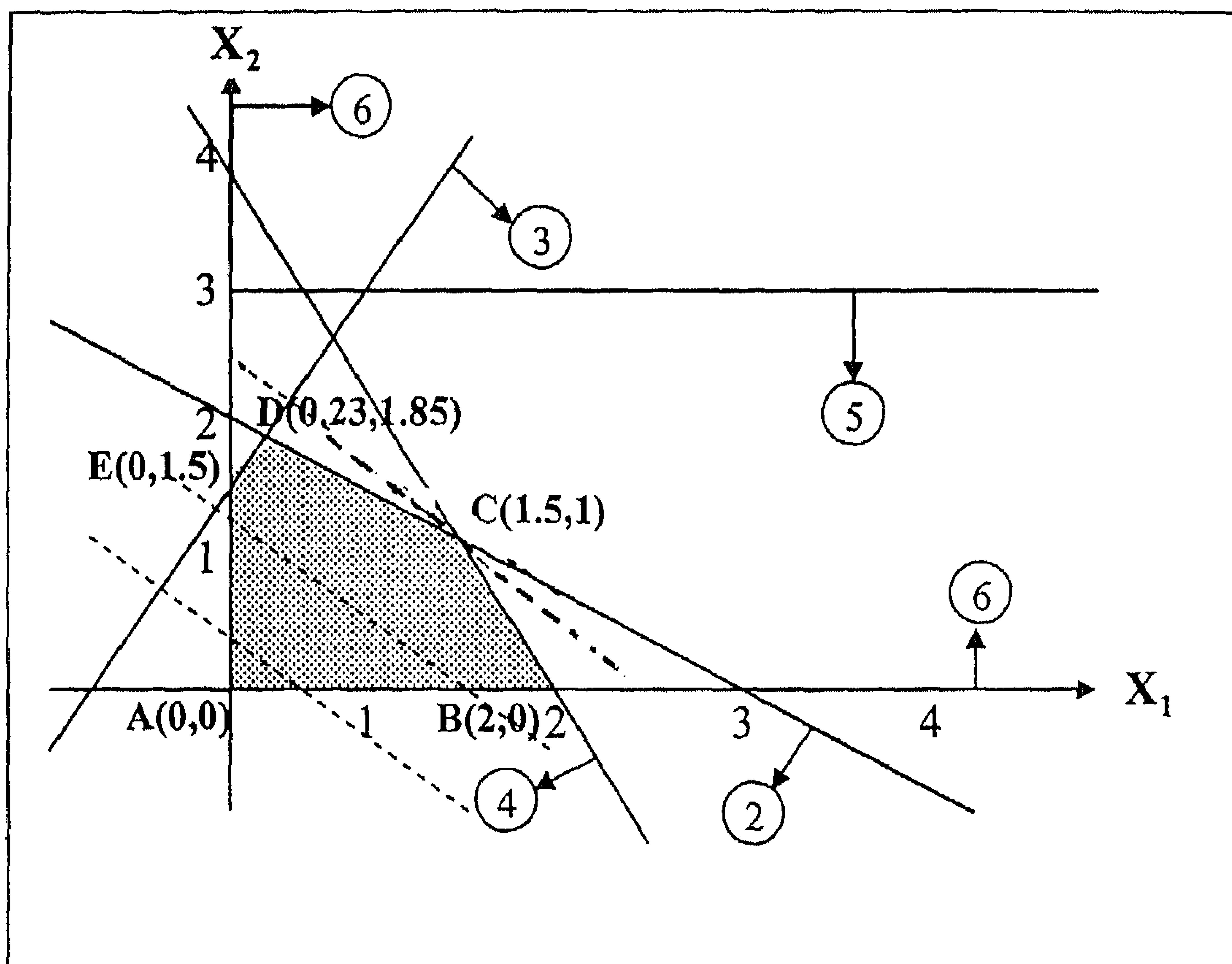
$$X_1 = X_2 = 0 \quad (11)$$

٢- رسم المعادلات في (11) – (7) في شكل واحد حيث تمثل كل معادلة بخط مستقيم كما هو موضح في شكل (٣-١).

٣- فبالنسبة لكل خط نجد أن الخط يقسم المستوى إلى جزئيين – جزء كل نقطة فيه تحقق المتباينة المناظرة للخط والجزء الآخر لا تحقق أي نقطة فيه المتباينة المناظرة للخط ، وسوف نشير إلى الجزء الذي يحقق المتباينة بالسهم المشير إلى اتجاه المتباينة، وكما هو موضح في شكل (١-٣) نجد أن المنطقة (ABCDE) التي تحقق جميع المتباينات في نفس الوقت (أي كل نقطة في المنطقة أو على حدودها تحقق جميع المتباينات في نفس الوقت).

<u>ملحوظة (١)</u>: يمكن تحديد اتجاه المتباينة بتحديد نقطة في أحدى الجزئيين الذي يقسمهما الخط والتعويض في الطرف الأيسر للمتباينة بالنقطة المحددة.

شكل (٣-١)



فإذا حققت النقطة المتباينة كان اتجاه المتباينة الجزء الذي تقع فيه النقطة وإن لم تحقق النقطة المتباينة يكون اتجاه المتباينة في الجزء الآخر الذي لا تقع فيه النقطة. وعادة للتبسيط تستخدم نقطة الأصل (0,0) لتحديد اتجاه المتباينة.

ملحوظة (٢): شروط عدم السالبية في المتباينات (6) أي المتباينتين $X_2 \geq 0$, $X_1 \geq 0$ يمثلهما معا بيانياً الربع الأول في المستوى. ونظراً لأن نماذج البرمجة الخطية تتضمن شروط عدم السالبية، فهذا مؤداه أن منطقة الحلول الممكنة تقع في الربع الأول.

تعريف (٣-١): منطقة الحلــول الممكنــة Feasible Solution Area هــي المنطقة التي تقع فيها (أو على حدودها) جميع النقط التي تحقــق جميــع القيــود (الهيكلية وعدم السالبية)، حيث تمثل كل نقطة من هذه النقط حل ممكن Feasible Solution للمشكلة.

تعريف (٣-٢): الحل الأمثل Optimum (Best) Solution للمشكلة هو أحد النقط في منطقة الحلول الممكنة التي تأخذ عندها دالة الهدف Z قيمتها المثلى (أي نهايتها العظمى في حالة إذا كان الهدف تعظيم Z ، أو نهايتها الــصغرى إذا كــان الهدف تصغير وذلك وفقا لطبيعة المشكلة).

وكما سوف نوضح في الباب الثامن أن نقطة الحل الأمثل هي إحدى النقط الطرفية (الركنية) extreme points لمنطقة الحلول الممكنة.

تعريف (٣-٣): النقطة الطرفية (الركنية) هي النقطة الناشئة عن تقاطع خطــين أو أكثر من الخطوط التي تناظر القيود الهيكلية وقيود عدم السالبية. ويمكننا تحديد نقطة الحل الأمثل بيانياً عن طريق رسم دالة الهدف:

$$Z = 5X_1 + X_2$$

عند نقط افتراضية مختلفة في خطوط متوازية كما هو موضح في شكل (٣-١) في الخطوط المتقطعة على النحو

$$5X_1 + X_2 = 0 \quad , \quad 5X_1 + X_2 = 3 \quad \text{أو} \quad 6 \quad \text{أو} \quad 9$$

فنجد أن قيمة دالة Z تزداد كلما اتجهنا إلى اليمين في داخل منطقة الحلول الممكنة (ABCDE) وتأخذ أكبر قيمة لها عند النقطة C(1.5,1) حيث Z = 8.5.

وكما ذكرنا سابقاً في تعريف (٣-٢)، أن الحل الأمثل أحد النقط الطرفية (الركنية) لمنطقة الحلول الممكنة، والممثلة في النقاط A,B,C,D,E. لذلك فإنه يمكن إيجاد الحل الأمثل بيانياً بدون رسم دالة الهدف عن طريق حساب قيمة دالة الهدف عند كل نقطة طرفية كما هو موضح بالجدول التالي:

جدول (٣-١)

النقط الطرفية (الركنية)	$Z = 5X_1 + X_2$	الحل الأمثل
A (0 , 0)	5(0) + 0 = 0	
B (2 , 0)	5(2) + 0 = 10	$x_1 = 1.5$
C (1.5 , 1)	5 (1.5) + 1 = 8.5 ⟶	$x_2 = 1$
D (0.23 , 1.85)	5(0.33) + 1.85 =3.0	$z = 8.5$
E (0 , 1.5)	5(0) + 1.5 =1.5	

ومما سبق يتضح أنه يمكن حل نموذج البرمجة الخطية الذي يتضمن متغيرين قراريين على الأكثر بيانياً على النحو الموضح في خطوات الخوارزم التالي.

<u>تعريف (٣-٤)</u>: تسمى النقط المختلفة لحل المعادلات المناظرة للقيود الهيكلية بنقط الحلول الأساسية **Basic Solutions** وتنقسم نقط الحلول الأساسية إلى نوعين، النوع الأول تسمى بنقط حلول أساسية ممكنة **Basic Feasible Solutions Points** وهي النقط التي تحقق كل نقطة منها شروط عدم السالبية وبالتالي تمثل كل نقطة طرفية حل أساسي ممكن. والنوع الثاني تسمى نقط حلول أساسية غير ممكنة **Basic Nonfeasible Solutions Points** وهي نقط حلول أساسية ولكن كل نقطة منها لا تحقق شروط عدم السالبية.

وفي الباب الثامن سوف نعطى تفاصيل أكثر عن الحلول الأساسية، واثبات أن الحل الأمثل هو أحد نقط الحلول الأساسية الممكنة.

خوارزم (٣-١): لحل مشكلة البرمجة الخطية بيانياً نتبع الخطوات المتتالية التالية:

١- تحويل المتباينات إلى متساويات (معادلات) ثم رسم هذه المتساويات.

٢- يتم تحديد اتجاه كل متباينة (أي تحديد المنطقة التي كل نقطة فيها تحقق المتباينة) ويتم ذلك عادةً بالتعويض في الطرف الأيسر للمتباينة بنقطة في أحد الجزئيين (اتجاه معين) فإذا حققت هذه النقطة المتباينة كان اتجاه المتباينة في نفس الجزء الذي تقع فيه النقطة وإذا لم تحقق النقطة المتباينة فيكون اتجاه المتباينة في الجزء الثاني الذي لا تقع فيه النقطة.

٣- تحديد منطقة الحلول الممكنة (إن وجدت) وهى عبارة عن المنطقة التي تحقق جميع المتباينات في نفس الوقت (أو بعبارة أخرى فإن منطقة الحلول الممكنة هي فئة التقاطع لكل الفئات التي تمثل مناطق تحقيق المتباينات) ثم تحديد النقط الطرفية لمنطقة الحلول الممكنة حيث تمثل كل نقطة طرفية حل أساسي ممكن **Feasible Basic Solution**. وممكن أن يكون ذلك بيانياً، وبما أن أي نقطة طرفية تمثل نقطة تقاطع خطين أو أكثر من الخطوط التي تناظر المتباينات، فأنه يمكن تحديد أي نقطة طرفية وذلك بحل معادلتين الخطين الناشئ عن تقاطعهما النقطة الطرفية.

٤- حساب قيمة دالة الهدف عند كل نقطة طرفية ممكنة وتحديد الحل الأمثل من بين الحلول الأساسية الممكنة.

ملحوظة (١): كل نقطة طرفية ممكنة تمثل حل أساسي ممكن.

ملحوظة (٢): في حالة وجود قيود قيود متعارضة، في هذه الحالة لا توجد منطقة حلول ممكنة (أي فئة الحلول الممكنة فئة خالية [55]). وبالتالي لا يوجد حل للمشكلة باستخدام أسلوب البرمجة الخطية. وفي هذه الحالة يمكن حل المشكلة بأسلوب آخر مثل أسلوب برمجة الهدف Goal Programming [13 , 43].

وكما ذكرنا سابقاً أنه يوجد عدد من حزم البرامج الجاهزة يمكن باستخدامها حل نماذج البرمجة الخطية بيانياً أو جبرياً – وسوف نتناول ذلك بالتفصيل في الفصل (٣-٧) من هذا الباب.

تعريف (٣-٥): القيد الزائد Redundant Constraint هو القيد الذي إذا تم استبعاده لا يؤثر على منطقة الحلول الممكنة وبالتالي فهذا يعنى أنه لا يوجد تأثير لهذا القيد على الحل. وعلى سبيل المثال القيد رقم (5) في المثال السابق يمثل قيد زائد.

مثال (٣-٢): أعتبر نموذج البرمجة الخطية التالي:

أوجد قيم X_1,X_2 بحيث

$$\text{Min.}Z = 100X_1 - 2X_2$$

$$\text{S.T.} \quad -X_1 + X_2 \le 1 \qquad (1)$$

$$10X_1 + 7X_2 \le 70 \qquad (2)$$

$$5X_1 + 2X_2 \ge 10 \qquad (3)$$

$$X_1 \le 10 \quad , \quad X_2 \le 12 \qquad (4)$$

$$X_1 , X_2 \ge 0 \qquad (5)$$

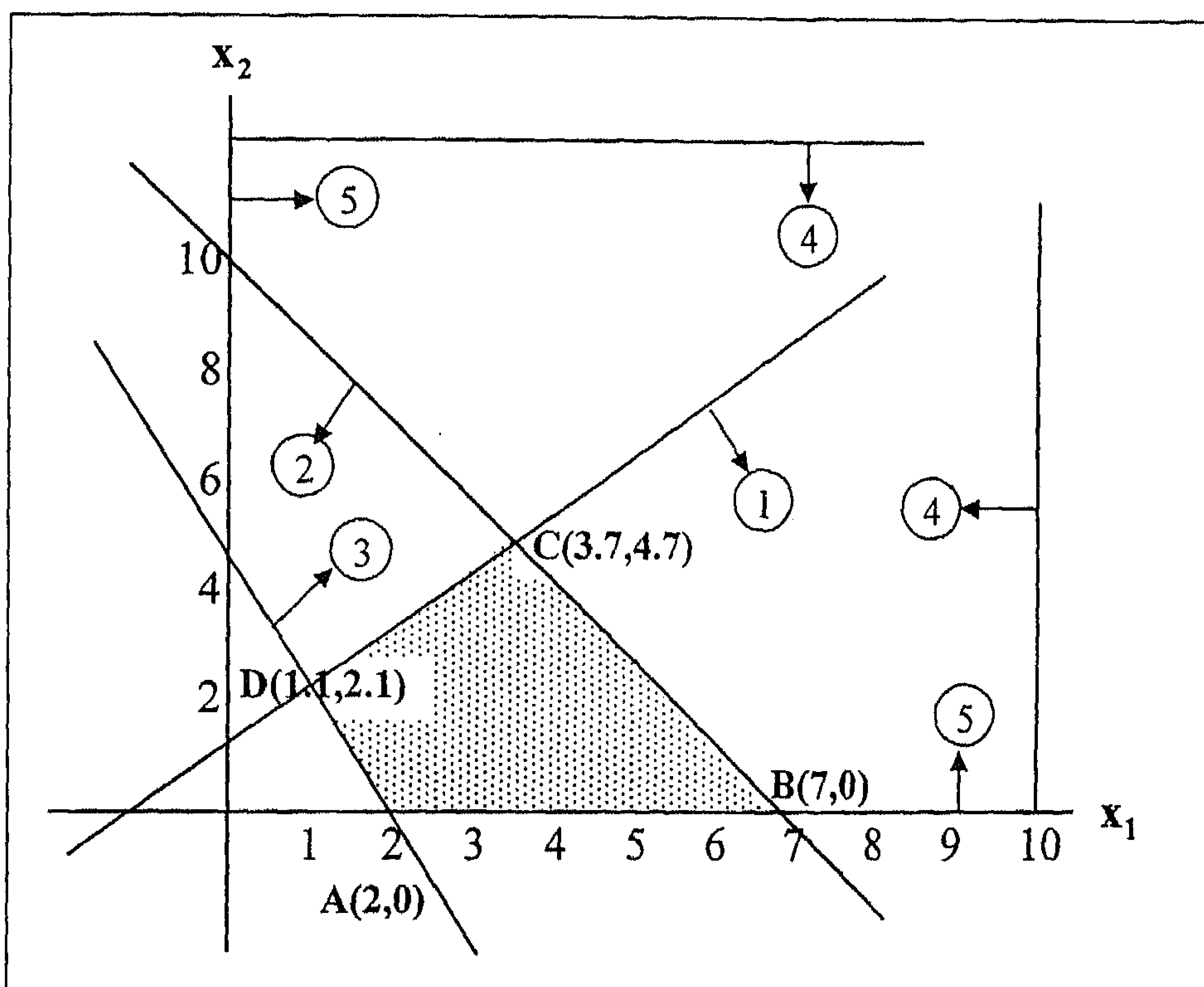
المطلوب:

١- أوجد الحل الأمثل بيانياً.

٢- حدد القيود الزائدة.

الحل: وفقا للخطوات في خوارزم (٣-١) منطقة الحلول الممكنة كما هو موضح في الشكل التالي:

شكل (٣-٢)



ومن الشكل يتضح أن منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة ABCD، وبالتالي يمكن تكوين الجدول التالي لتحديد الحل الأمثل.

ومن الرسم يتضح أن القيدين في (4) قيدين زائدين، حيث أن وجود هذين القيدين أو حذفهما لا يؤثر على منطقة الحلول الممكنة وبالتالي لا يؤثر على الحل الأمثل.

جدول (٣-٢)

النقط الطرفية	$Z = 100X_1 - 2X_2$	الحل الأمثل
A (2 , 0)	Z = 100(2) -2(0) = 200	
B (7 , 0)	Z = 100(7) -2(0) = 700	$x_1 = 1.1$
C(3.7 , 4.7)	Z = 100(3.7) –2(4.7) = 360.6	$x_2 = 2.1$
D(1.1 , 2.1)	Z = 100(1.1) -2(2.1) = 105.8	z = 105.8

مثال (٣-٣): حدد منطقة الحلول الممكنة لنموذج البرمجة الخطية التالي.

$$\text{Max.}Z = 100X_1 + 10X_2$$

$$\text{S.T.} \quad 2X_1 + X_2 \geq 10 \qquad (1)$$

$$6X_1 + X_2 \leq 60 \qquad (2)$$

$$-X_1 + X_2 = 5 \qquad (3)$$

$$X_1 , X_2 \geq 0 \qquad (4)$$

الحل:

من الرسم يتضح أن فئة الحلول الممكنة تمثل بيانياً بجميع النقط الواقعة على الخط AB. بمعنى أن كل نقطة تقع على الخط AB تمثل حل ممكن لنموذج أي تحقق جميع القيود (4)-(1).

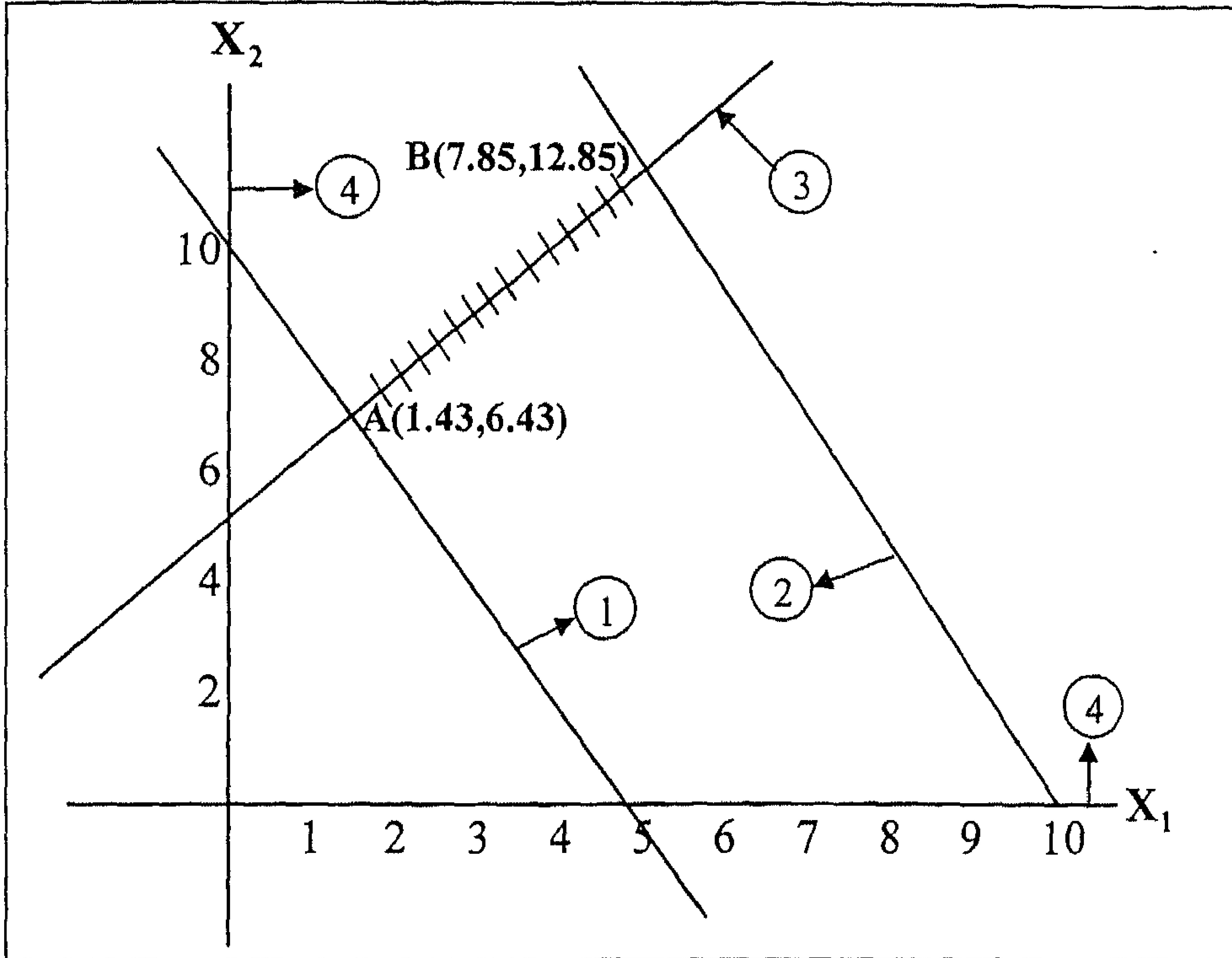
ونجد أن النقط الطرفية في هذه الحالة هي A(1.43,6.43)، B(7.85,12.85). ونجد أن النهاية العظمى للدالة Z عند النقطة B حيث:

$$Z = 913.5$$

وبالتالي يكون الحل الأمثل على النحو:

$$X_1 = 7.85 \;,\; X_2 = 12.85 \;,\; Z = 913.5$$

شكل (٣-٣)



<u>مثال (٣-٤)</u>: أعتبر نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Min.Z = 4X_1 - 3X_2$$

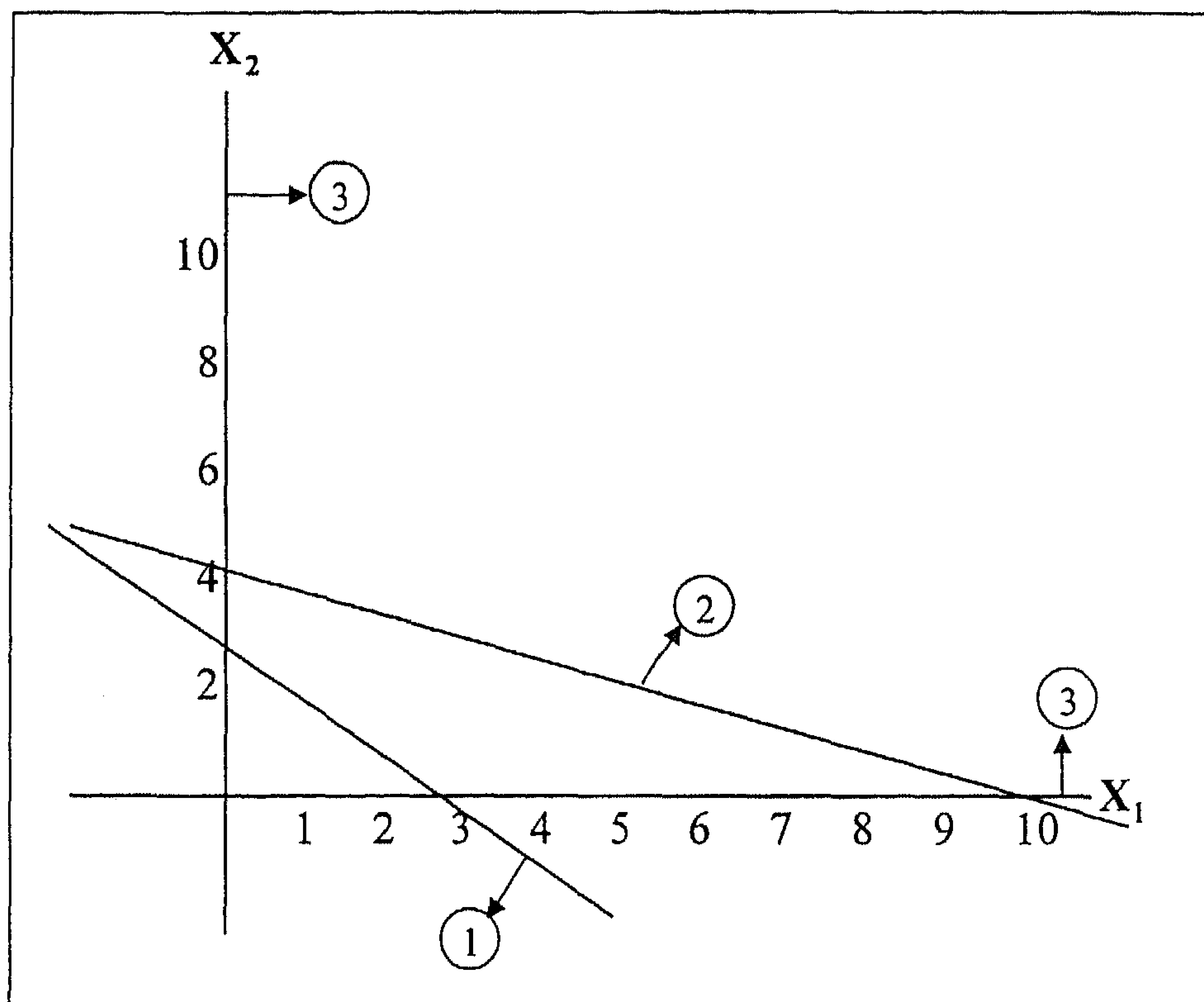
S.T. $X_1 + X_2 \leq 3$ (1)

$2X_1 + 5X_2 \geq 20$ (2)

$X_1 , X_2 \geq 0$ (4)

وضح بيانياً أنه لا يوجد حل ممكن Infeasible Solution للمشكلة مع ذكر السبب؟

شكل (٣-٤)



من الشكل يتضح أنه لا توجد منطقة حلول ممكن، أو بعبارة أخرى لا توجد نقطة واحد تحقق جميع القيود ويرجع ذلك لوجود تعارض Conflicting بين القيدين (1) ، (2). وهذا النوع من المشاكل يمكن حله باستخدام أساليب أخرى مثل برمجة الهدف .Goal Prog مثلا.

(٣-٣) طريقة السمبلكس Simplex Method

في الفصل السابق تناولنا حل نموذج البرمجة الخطية بيانياً في حالة وجود متغيرين قراريين على الأكثر.

وفي هذا الفصل سوف نتناول الطريقة الجبرية التي يمكن باستخدامها حل نماذج البرمجة الخطية التي تحتوى على أي عدد من المتغيرات القرارية، وتسمى الطريقة الجبرية بطريقة السمبلكس Simplex Method. وكما ذكرنا سابقاً يعتبر عالم الرياضيات Dantzing سنة ١٩٤٥م أول من قدم طريقة السمبلكس، ثم تلي ذلك تطورات متعددة لهذه الطريقة تم تناولها في خوارزميات متعددة ويرجع ذلك إلى إمكانية استخدام هذه الطريقة في حل كثير من المشاكل الفعلية ذات الحجم الكبير والأكثر تعقيداً. هذا بالإضافة إلى تصميم عديد من برامج الحاسب لهذه الخوارزميات المقدمة، مما ساعد على استخدام هذه الطريقة في حل كثير من المشاكل الفعلية المعقدة بنجاح، وسوف نوضح ذلك في هذا الباب والأبواب التالية.

وكما أوضحنا في الفصل السابق أن كل نقطة طرفية ممكنة تمثل حل أساسي ممكن Feasible Basic Solution. وتضع طريقة السمبلكس الشروط الضرورية والكافية Necessary and Sufficient Conditions لتحديد الحل الأمثل للمشكلة في شكل نظريات وإجراءات سوف نتناولها بالتفصيل في الباب الثامن من هذا الكتاب. ولكن في هذا الفصل سوف نلخص المفاهيم الأساسية المبنية عليها طريقة السمبلكس وتتلخص فيما يلي:

- حل المعادلات المناظرة للقيود الهيكلية لتحديد النقط الطرفية والتي تمثل حلول أساسية.

- البدء بنقطة حل أساسي مبدئي ممكن **Initial Feasible Solution** (أي تحقق الشروط الهيكلية وشروط عدم السلبية أيضاً).
- الانتقال من حل أساسي ممكن (من نقطة طرفية ممكنة) إلى حل أساسي آخر ممكن وتسمى هذه الإجراءات بشروط الإمكانية **Feasibility Conditions**.
- تحديد الشروط والإجراءات التي تضمن أن يتم الانتقال من حل أساسي إلى حل أساسي أفضل (أي تتحسن قيمة دالة الهدف) وتسمى هذه الشروط بشروط الأمثلية **Optimality Conditions**.

وكما سوف نوضح فيما يلي أن طريقة السمبلكس طريقة تكرارية **Iterative Method**، بمعنى أنه عند الانتقال من نقطة حل أساسي ممكن إلى نقطة حل أساسي ممكن أفضل يتم اختبار الشروط الممكنة والكافية ويتم تكرار هذه الإجراءات بالنسبة لكل حل أساسي ممكن يتم الانتقال إلية.

ملحوظة: نتيجة أن الانتقال يتم من نقطة حل أساسي ممكن إلى نقطة حل أساسي ممكن أفضل فهذا قد يؤدي إلى أن عدد نقط الحلول الأساسية الممكنة التي يتم فحصها أقل من العدد الكلى لنقط الحلول الأساسية الممكنة.

وكما ذكرنا في الفصل السابق أنه لتحديد الحل الأمثل بيانياً كان يتطلب ذلك: أولاً تحديد جميع نقط الحلول الأساسية الممكنة أي النقط الطرفية الممكنة (علماً أنه في طريقة السمبلكس قد لا يتطلب فحص جميع نقط الحلول الأساسية كما ذكرنا أعلاه). ثانياً حساب قيمة دالة الهدف عند كل نقطة طرفية ممكنة، ثم اختيار أفضل نقطة حل أساسي ممكن ويعتبر هذا الإجراء إجراء غير كفأ **An Inefficient procedure**.

فمثلاً إذا كان عدد المجاهيل (المتغيرات القرارية + المكملة) يساوى 20 وعدد القيود الهيكلية يساوى 6 فإن عدد النقط الطرفية في هذه الحالة يساوى 38760 حيث:

$$C_6^{20} = \frac{20!}{6!(20-6)!} = \frac{20\times19\times18\times17\times16\times15}{6\times5\times4\times3\times2\times1} = 38760 \text{ نقطة}$$

أي أنه يجب تحديد الـ 38760 نقطة ثم فحص كل نقطة من هذه النقط لتحديد نوعها فإذا كانت نقطة ممكنة فإنه يتم حساب قيمة دالة الهدف عندها - وهذا إجراء غير كفأ وبصفة خاصة كلما زادت عدد القيود الهيكلية وعدد المتغيرات.

ولكن تكمن كفاءة طريقة السمبلكس في أننا ننتقل من نقطة حل أساسي ممكن إلى نقطة حل أساسي ممكن أفضل من السابقة لها، وذلك لوجود شروط الأمثلية ويؤدى ذلك إلى عدم تحديد فحص جميع النقط الطرفية مما يؤدى إلى سرعة وكفاءة الوصول إلى الحل الأمثل.

وفيما يلي سوف نوضح باختصار من خلال المثالين التاليين عدد نقط الحلول الأساسية وتحديد الحلول الأساسية الممكنة وغير الممكنة.

<u>مثال (٣-٥)</u>: أعتبر نموذج البرمجة الخطية التالي:

أوجد قيم X_1, X_2 بحيث

$$\text{Min.}Z = 5X_1 - X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 \le 10 \qquad (2)$$

$$3X_1 - 5X_2 \le 15 \qquad (3)$$

$$X_1, X_2 \ge 0 \qquad (4)$$

المطلوب:

١- تحديد نقط الحلول الأساسية الممكنة وغير الممكنة ووضح ذلك بيانياً.

٢- تحديد نقط الحلول الأساسية الممكنة.

الحل:

كما ذكرنا سابقاً أن الحلول الأساسية هي عبارة عن نقط تقاطع الخطـوط المناظرة للمتباينات الهيكلية وعدم السالبية- وتكون ممكنة عندما تحقـق شـروط عدم السالبية وتكون غير ممكنة عندما لا تحقق شروط عدم السالبية.

ويمكن تحديد الحلول الأساسية في النموذج السابق بتحويل القيود الهيكلية إلى معادلات. فنجد أنه ممكن تحويل المتباينات من (3) - (2) إلى معادلات بإضافة متغيرات غير سالبة Non-negative Variables (S_1,S_2) للطـرف الأيـسر للمتباينات على الترتيب، وتسمى المتغيرات S_1,S_2 بالمتغيرات المكملـة Slack Variables ويمكن إعادة كتابة النموذج (4) - (1) على النحو التالي:

$$\text{Min.}Z = 5X_1 - X_2 + 0S_1 + 0S_2 \quad (5)$$

$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 + S_1 = 10 \quad (6)$$

$$3X_1 - 5X_2 + S_2 = 15 \quad (7)$$

$$X_1 , X_2 , S_1 , S_2 \geq 0 \quad (8)$$

ونجد أن القيود الهيكلية بعد تحويلها إلى معادلات في (7) - (6) عبـارة عن معادلتين في 4 متغيرات، ولحل هاتين المعادلتين آنياً فهـذا يتطلـب وضـع متغيرين من المتغيرات الـ4 يساوى كل متغير منها للصفر(وتسمى هذه المتغيرات بالمتغيرات غير الأساسية Nonbasic Variables) حتى يصبح لدينا معادلتين في

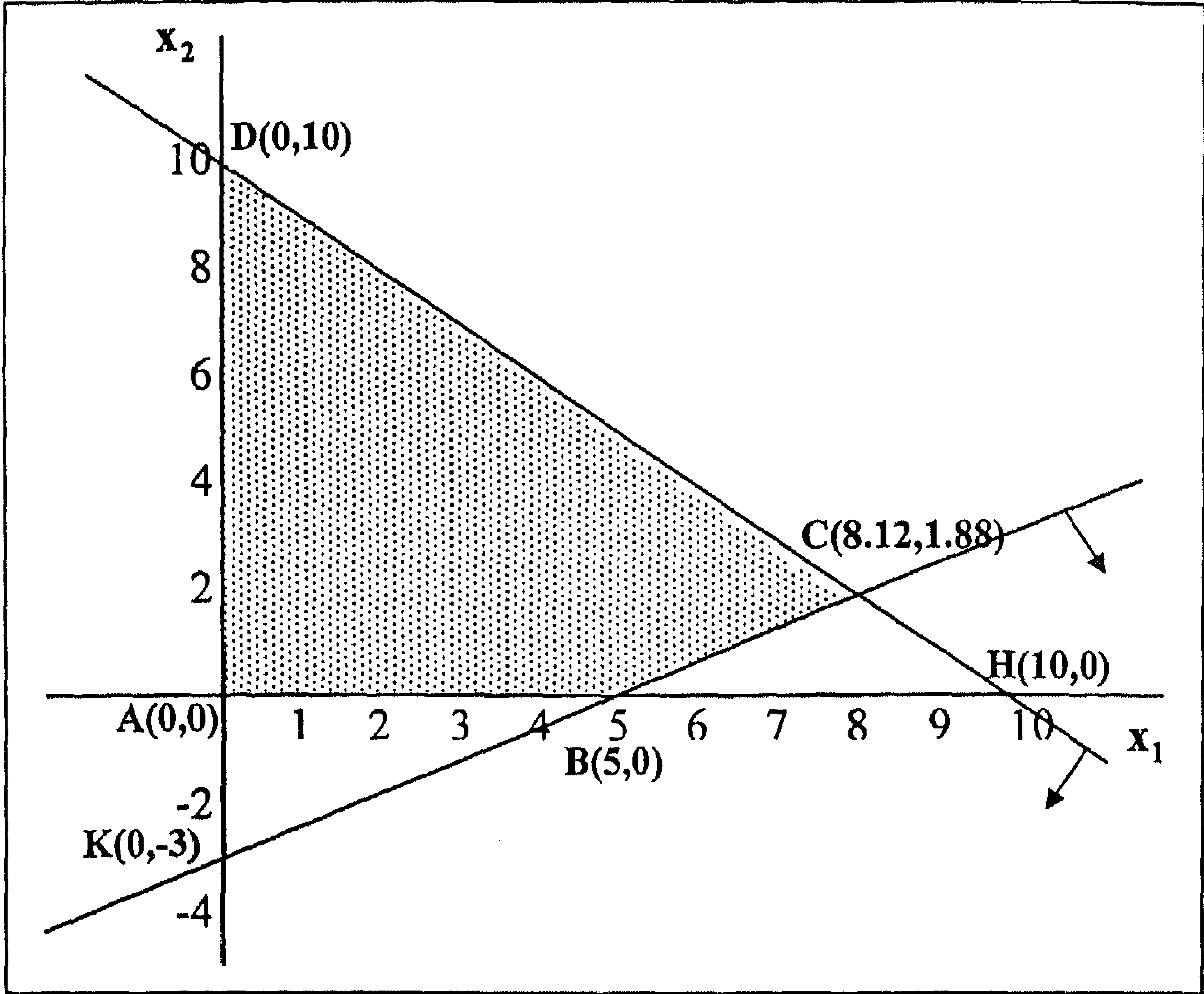
متغيرين فقط (تسمى هذه المتغيرات بالمتغيرات الأساسية Basic Variables) وبالتالي يمكن حلهما. وفي هذا المثال نجد لدينا عدد بدائل تساوى 6 (حيث $C_2^4 = 6$)، والجدول التالي يوضح جميع هذه البدائل من الحلول الممكنة وغير الممكنة. كذلك يوضح الشكل التالي النقط الممكنة وغير الممكنة بيانياً.

جدول (٣-٣)

نوع الحل (النقطة)	الحلول الأساسية (النقط الطرفية) (X_1, X_2, S_1, S_2)	مسلسل
ممكن	$(X_1=0 , X_2=0 , S_1=10 , S_2=15) \rightarrow A$	1
ممكن	$(X_1=5, X_2=0, S_1=5, S_2=0) \rightarrow B$	2
ممكن	$(X_1=8.12 , X_2=1.88 , S_1=0 , S_2=0) \rightarrow C$	3
ممكن	$(X_1=0 , X_2=10 , S_1=0 , S_2=65) \rightarrow D$	4
غير ممكن	$(X_1=0 , X_2=-3 , S_1=13 , S_2=0) \rightarrow K$	5
غير ممكن	$(X_1=10 , X_2=0 , S_1=0 , S_2=5) \rightarrow H$	6

وبصفة عامة إذا اعتبرنا عدد المعادلات المناظرة لعدد القيود الهيكلية بالرمز m ، وعدد المتغيرات القرارية X والمتغيرات المكملة S معاً يساوى n ، ولحل المعادلات المناظرة للقيود معاً يتطلب ذلك وضع عدد (n-m) من المتغيرات يساوى صفر(أي المتغيرات غير الأساسية) ليصبح عدد المعادلات m في m من المتغيرات (التي تمثل المجاهيل - المتغيرات الأساسية)، ويتم ذلك بعدد من البدائل يساوى C_m^n أي يصبح لدينا عدد من الحلول الأساسية (النقط الطرفية) الممكنة Feasible Solution أو غير الممكنة Infeasible Solution أو الحلول غير الموجودة Non-existent Solution.

شكل (٣-٥)



<u>مثال (٣-٦)</u>: أعتبر نموذج البرمجة الخطية التالي:

أوجد قيم X_1,X_2 بحيث

$$\text{Max.}Z = 2X_1 + 3X_2 \quad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad 2X_1 + X_2 \leq 10 \quad (2)$$

$$8X_1 - 2X_2 \leq 16 \quad (3)$$

$$X_2 \leq 7 \quad (4)$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \quad (5)$$

المطلوب:

١- تحديد عدد الحلول الأساسية (النقط الطرفية) الممكنة وغير الممكنة وغير الموجودة إن وجدت.

٢- تحديد عدد الحلول الأساسية الممكنة وتوضيح ذلك بيانيا مع توضيح منطقة الحلول الممكنة.

الحل: يمكن تحويل المتباينات (4) – (2) إلى معادلات بإضافة المتغيرات المكملة ليصبح النموذج على النحو التالي:

$$Max.Z = 2X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 \quad (6)$$

$$S.T. \quad 2X_1 + X_2 + S_1 = 10 \quad (7)$$

$$8X_1 - 2X_2 + S_2 = 16 \quad (8)$$

$$X_2 + S_3 = 7 \quad (9)$$

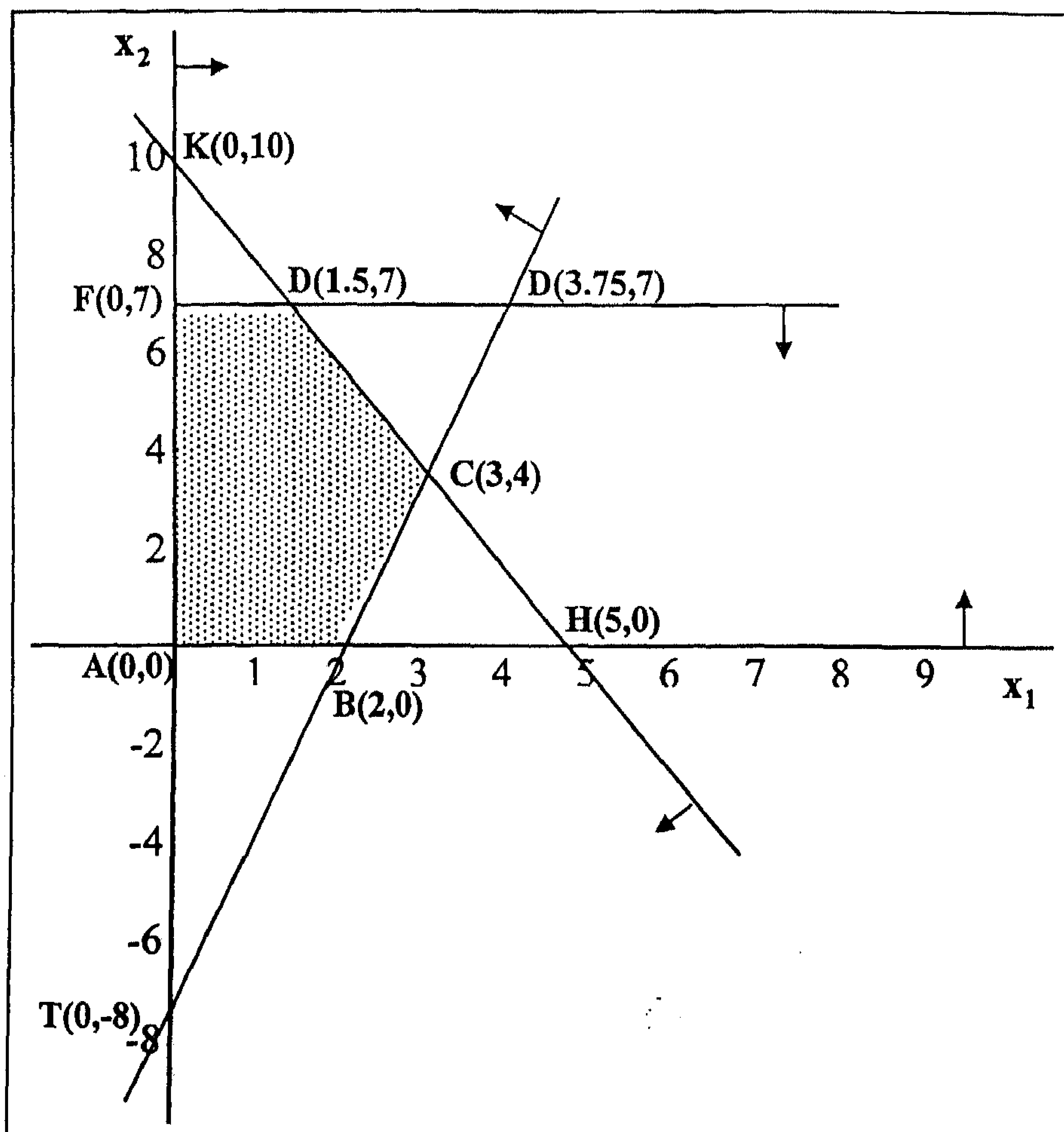
$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0 \quad (10)$$

حيث تمثل القيود من (9) – (7) معادلات خطية في المتغيرات X_1, X_2, S_1, S_2, S_3. فإذا رمزنا لعدد المعادلات بالرمز m فإنه في هذه الحالة $m = 3$ ، كذلك نجد أن عدد المجاهيل X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 بالرمز n فإننا نجد أن $n = 5$.

ولحل هذه المعادلات آنياً لابد من وضع عدد (n-m) من المجاهيل تساوى صفر (حتى تتساوى عدد المجاهيل مع عدد المعادلات). وبالتالي يكون لدينا عدد 3 معادلات في ثلاثة مجاهيل يمكن تحديد قيمهم بحل المعادلات. حيث يكون لدينا عدد C_m^n من البدائل الممكنة بوضع عدد (n-m) من المجاهيل يساوى صفر. كذلك نجد أن العدد C_m^n يمثل عدد الحلول الأساسية للمعادلات (9) – (7) أي يوجد

عدد $10 = \frac{5!}{3!2!} = C_m^n$ نقط طرفية بعضها يمثل حل ممكن Feasible Solution وبعضها الآخر يمثل حلول غير ممكنة Infeasible Solution وبعضها ممكن يكون غير موجود Non-existent Solution والشكل التالي يوضح ذلك:

شكل (٣-٦)



كذلك يوضح الجدول التالي نوع كل حل أساسي:

جدول (٣-٤)

نوع الحل (النقطة)	الحلول الأساسية (النقط الطرفية) $(X_1, X_2, S_1, S_2, S_3)$	مسلسل
ممكن	$(X_1=0, X_2=0, S_1=10, S_2=16, S_3=7) \rightarrow A$	1
ممكن	$(X_1=0, X_2=7, S_1=10, S_2=0, S_3=0) \rightarrow F$	2
ممكن	$(X_1=2, X_2=0, S_1=6, S_2=0, S_3=7) \rightarrow B$	3
ممكن	$(X_1=3, X_2=4, S_1=0, S_2=0, S_3=3) \rightarrow C$	4
غير ممكن	$(X_1=3.75, X_2=7, S_1=0, S_2=0, S_3=0) \rightarrow D$	5
ممكن	$(X_1=1.5, X_2=7, S_1=0, S_2=0, S_3=0) \rightarrow E$	6
غير ممكن	$(X_1=0, X_2=10, S_1=0, S_2=36, S_3=-3) \rightarrow K$	7
غير ممكن	$(X_1=0, X_2=-8, S_1=0, S_2=0, S_3=15) \rightarrow T$	8
غير ممكن	$(X_1=5, X_2=0, S_1=0, S_2=0, S_3=7) \rightarrow H$	9
غير موجود	$(X_1=0, X_2=0, S_1=10, S_2=16, S_3=0) \rightarrow I$	10

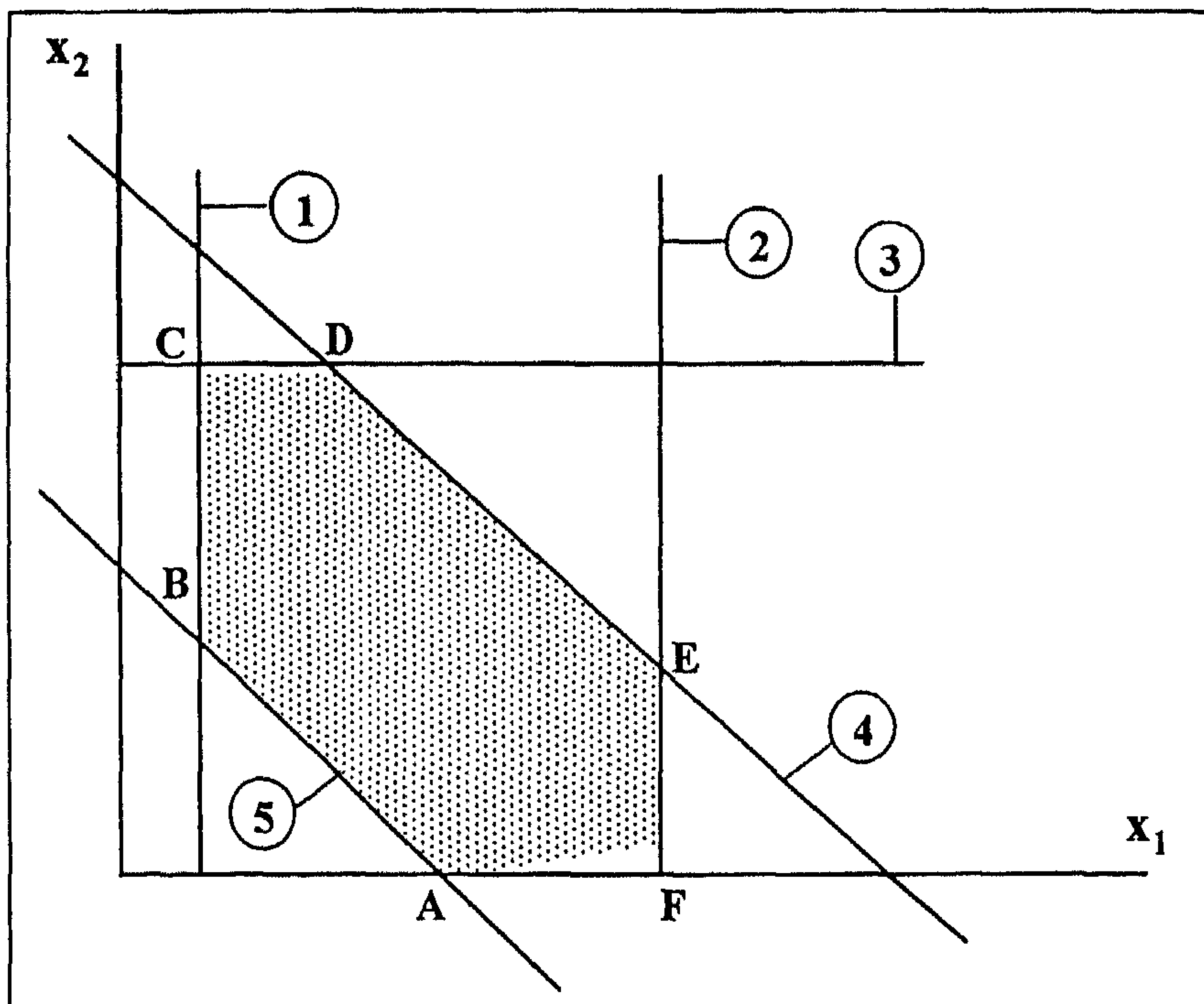
مثال (٣-٧): أعتبر منطقة الحلول الممكنة الموضحة في الشكل التالي لأحدى مشاكل البرمجة الخطية.

١- حدد طبيعة كل قيد ($\leq$ أو $\geq$ أو $=$) من القيود الهيكلية (5)-(1).

٢- حدد المتغيرات المكملة التي يجب إضافتها (بالموجب أو بالسالب) إلى كل قيد هيكلي.

٣- عند كل نقطة طرفية ممكنة (A,B,C,D,E,F) حدد المتغيرات الأساسية والمتغيرات غير الأساسية.

شكل (٣-٧)



الحل: ١- من الشكل يتضح أن طبيعة القيود الهيكلية على النحو التالي:

$$(1) \geq \quad , \quad (2) \leq \quad , \quad (3) \leq \quad , \quad (4) \leq \quad , \quad (5) \geq$$

٢- فيما يلي رقم القيد كذلك المتغير المكمل المناظر له:

المتغير المكمل	القيد
$-S_1$	(1)
$+S_2$	(2)
$+S_3$	(3)
$+S_4$	(4)
$-S_5$	(5)

٣- من الرسم يتضح أن عدد المتغيرات r حيث $r = 7$ ، وعدد القيــود الهيكليــة $m = 5$ وبالتالي عند كل نقطة طرفية يكون لــدينا 5 متغيــرات أساســية، 2 متغير غير أساسي.

والجدول التالي يوضح المتغيرات الأساسية والمتغيرات غير الأساسية عند كل نقطة طرفية ممكنة.

جدول (٣-٥)

المتغيرات غير الأساسية	المتغيرات الأساسية	النقطة
X_2 , S_5	$X_1 , S_2 , S_3 , S_4 , S_1$	A
X_2 , S_2	$X_1 , S_3 , S_4 , S_5 , S_1$	F
S_4 , S_2	$X_1 , X_2 , S_1 , S_3 , S_5$	E
S_3 , S_4	$X_1 , X_2 , S_1 , S_2 , S_5$	D
S_3 , S_1	$X_1 , X_2 , S_2 , S_4 , S_5$	C

وفي هذا الباب سوف نتناول كيفية تطبيق واستخدام طريقة السمبلكس (أي تطبيق شروط الإمكانية والأمثلية) باستخدام أسلوب الجداول من خلال الأمثلة التالية إما النظريات التي بنيت عليها طريقة السمبلكس فسوف نتناولها بالتفــصيل فــي الباب الثامن من هذا الكتاب.

وعند استخدام طريقة السمبلكس نفرق بين حالتين يكــون النمــوذج فــي إحداهما وهما:

الحالة الأولى: يكون الطرف الأيسر لجميع القيود الهيكلية أقل من الطرف الأيمن ($\leq$) والقيم الثابتة في الطرف الأيمن قيم غير سالبة.

الحالة الثانية: يكون الطرف الأيسر لبعض (أو كل) القيود الهيكلية أقل أو أكبر أو يساوى الطرف الأيمن ($=$, $\geq$, $\leq$) والقيم الثابتة في الطرف الأيمن قيم غير سالبة.

وسوف نتناول الحالة الأولى في هذا الفصل ثم نتناول الحالة الثانية في الفصلين التاليين (٣-٤) ، (٣-٥).

مثال (٣-٨): أعتبر المثال السابق

أوجد قيم X_1,X_2 بحيث

$$\text{Max.}Z = 2X_1 + 3X_2 \qquad (1)$$
$$\text{S.T.} \quad 2X_1 + X_2 \leq 10 \qquad (2)$$
$$8X_1 - 2X_2 \leq 16 \qquad (3)$$
$$X_2 \leq 7 \qquad (4)$$
$$X_1 , X_2 \geq 0 \qquad (5)$$

ولإيجاد حل هذا المثال باستخدام طريقة السمبلكس نتبع الخطوات التالية:

أولاً:

١- في النموذج (5) – (1) يتم تحويل دالة الهدف إلى قيد، وتحويل القيود الهيكلية إلى معادلات بإضافة المتغيرات المكملة على النحو التالي:

$$Z - 2X_1 - 3X_2 = 0 \quad (6)$$
$$2X_1 + X_2 + S_1 = 10 \quad (7)$$
$$8X_1 - 2X_2 + S_2 = 16 \quad (8)$$
$$X_2 + S_3 = 7 \quad (9)$$

٢- نبدأ بنقطة الحل الممكنة $(X_1=0, X_2=0, S_1=10, S_2=16, S_3=7)$ وهـذه النقطة يمكن اعتبارها نقطة حل أساسي مبدئية ممكنة Initial Feasible Basic Solution – ونجد أن قيمة دالة الهدف عند هذه النقطة يـساوى صفر أي $Z = 0$ حيث:

$$Z = 2X_1 + 3X_2 = 2(0) + 3(0) = 0$$

والنقطة $(Z=0, X_1=0, X_2=0)$ تمثل حل أساسي ممكن حيـث تـم اعتبـار المتغيـرات $(S_1=10, S_2=16, S_3=7)$ متغيـرات أساسـية والمتغيـرات $(X_1=0 , X_2=0)$ متغيرات غير أساسية.

ويمكن وضع المعادلات (9) – (6) في الجدول المبدئي التالي حيـث يوضـح الجدول المتغيرات الأساسية (الداخلة في الحـل) وقـيمهم والمتغيـرات غيـر الأساسية (غير الداخلة في الحل وبالتالي قيمة كل متغير منها يساوى صـفر) كذلك قيمة دالة الهدف عند هذا الحل الأساسي المبدئي.

والأعمدة في الجدول من (7) – (3) تمثل المتغيرات الأساسية (S_1, S_2 , S_3) والمتغيرات غير الأساسية في هذه النقطة (X_1 , X_2)، والعمود (2) يمثـل Z كما لو كانت متغير أيضاً. أما العمود (8) فيمثـل قـيم Z وقـيم المتغيـرات

الأساسية في هذه النقطة. أما الصفوف من (5)-(3) تمثل معاملات المتغيرات في القيود الهيكلية، كذلك يمثل الصف (2) معاملات المتغيرات الأساسية وغير الأساسية في دالة الهدف بعد تحويلها إلى معادلة في (6).

جدول (٣-٦)

المتغير الداخل: X_2 — المتغير الخارج: S_3 — العنصر المحوري: 1

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	
(1)	المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	الحل	
(2)	Z	1	-2	-3	0	0	0	0	معادلة Z←
(3)	S_1	0	2	1	1	0	0	10	معادلة S_1←
(4)	S_2	0	8	-2	0	1	0	16	معادلة S_2←
(5)	S_3	0	0	(1)	0	0	1	7	معادلة S_3←

<u>ثانياً:</u> للانتقال من النقطة الطرفية $(X_1=0,\ X_2=0,\ S_1=10,\ S_2=16,\ S_3=7)$ إلى نقطة طرفية ممكنة أخرى تكون أفضل منها، أي تتحسن عندها قيمة دالة الهدف Z ، أي تكون قيمة Z أفضل من قيمة Z عند النقطة السابقة. ويتم تحديد هذه النقطة على النحو التالي:

١- فحص معاملات المتغيرات غير الأساسية (X_1 , X_2) في الصف (2) لتحديد أي متغير من المتغيرات غير الأساسية إذا دخل في الحل يؤدى ذلك تحسين قيمة Z ، فنجد أن معامل X_2 في دالة الهدف أكبر من معامل X_1، وحيث

أن الهدف تعظيم Z، بالتالي فإن اختيار X_2 كمتغير داخل يؤدى إلى تحسين قيمة دالة الهدف Z أسرع من دخول X_1.
بالتالي فأن X_2 يمثل المتغير الداخل **Entering Variable** في الحل الجديد.

ويمكن تحديد المتغير الداخل من جدول (٣-٥) مباشرة بتحديد معاملات المتغيرات غير الأساسية في دالة الهدف أي في الصف (2)، ففي:

- عملية التعظيم يتم اعتبار المتغير الداخل هو المتغير الذي له معامل بأقل قيمة سالبة في الصف (2).
- عملية التصغير يتم اعتبار المتغير الداخل هو المتغير الذي له معامل بأكبر قيمة موجبة في الصف (2).

وبصفة عامة المتغير الذي له أقل معامل في الصف (2) بإشارة سالبة في حالة التعظيم وأكبر معامل بإشارة موجبة في حالة التصغير
ويسمى العمود الذي يمثل المتغير الداخل بالعمود المحوري **Pivot Column**، وبالتالي يكون العمود المحوري هو العمود رقم (4) في الجدول السابق.

٢- وفي مقابل دخول المتغير X_2 في الحل الأساسي فلابد أن يصبح أحد المتغيرات الأساسية S_1, S_2, S_3 متغير غير أساسي، أي تصبح قيمته تساوى صفر في الحل الجديد، ويسمى هذا المتغير بالمتغير الخارج **Leaving Variable** ويسمى الصف الذي يمثل هذا المتغير الخارج في

الجدول بالصف المحوري Pivot Row ويسمى العنصر الناتج عن تقاطع الصف المحوري بالعمود المحوري بالعنصر المحوري Pivot Element.
وللتحديد أي متغير من S_1, S_2, S_3 سوف يكون المتغير الخارج، نعبر عن S_1, S_2, S_3 بدلالة المتغير الداخل X_2 عندما $X_1=0$ (لأنها متغير غير أساسي) في المعادلات (9) – (7) على النحو التالي.

$$S_1 = 10 - X_2 \quad (10)$$

$$S_2 = 16 + 2X_2 \quad (11)$$

$$S_3 = 7 - X_2 \quad (12)$$

ومن المعادلات (12) – (10) نجد أن المتغير S_3 يصبح يساوى صفر عندما $X_2=7/1=7$ وتصبح S_1 تساوى صفر عندما $X_2=10/1=10$(لا يتم فحص S_2 لأنه عندما تزيد X_2 تزيد S_2 أيضاً وهذا يعنى أن خروج المتغير S_2 سوف يؤثر على منطقة الحلول الممكنة، فيتم استبعاده)، وبالتالي نجد أن S_3 تؤول إلى الصفر عندما تتزايد قيمة X_2 أسرع من S_1، وبالتالي يتم اختيار المتغير S_3 كمتغير خارج، وهذا سوف يؤدى إلى خروج المتغير S_3 بحيث لا يؤثر ذلك على منطقة الحلول الممكنة.

– ويمكن تحديد المتغير الخارج مباشرة من جدول (٣–٥) على النحو التالي:

قسمة قيم المتغيرات الأساسية في العمود (8) على معاملات المتغير غير الأساسي الداخل X_2 في العمود المحوري (العمود 4) المناظرة لها مع

استبعاد المتغيرات الأساسية ذات المعاملات السالبة أو الصفرية في العمود (4) على النحو الموضح:

المتغيرات الأساسية	X_2	الحل	
S_1	1	10	10/1 = 10
S_2	-2	16	——
S_3 ← المتغير الخارج	1	7	7/1 = 7

ويكون المتغير الخارج هو المتغير المناظر لأقل نسبة موجبة (ويلاحظ استبعاد S_2 لأن معاملها في العمود (4) سالب).

ثالثاً: بتحديد المتغير الداخل X_2 والمتغير الخارج S_3 تصبح المتغيرات الأساسية في نقطة الحل الجديدة S_1 , S_2 , X_2 والمتغيرات غير الأساسية X_1 , S_3 وباستخدام طريقة جاوس جاردن **Gaus–Jordan Method** لحل المعادلات الخطية (أنظر طريقة حل المعادلات الخطية [39,49]) يمكن الحصول على الحل على النحو التالي:

١- تعبر عن المتغيرات الأساسية في المعادلات (9)-(7) بدلالة المتغيرات غير الأساسية X_1, S_3 كذلك دالة الهدف Z على النحو:

$$X_2 = 7 - S_3 \quad (13)$$

$$S_1 = 10 - 2X_1 - (7 - S_3) = 3 - 2 X_1 + S_3 \quad (14)$$

$$S_2 = 16 - 8 X_1 + 2 (7 - S_3) = 30 - 8 X_1 - 2 S_3 \quad (15)$$

$$Z = 2X_1 + 3(7 - S_3) = 2X_1 + 21 - 3 S_3 \quad (16)$$

٢- وبوضع $X_1=0, \quad S_3=0$ حيث أنها متغيرات غير أساسية نجد أن نقطة الحل الحالية:

$$Z=21\ ,\ X_1=o\ ,\ X_2=7\ ,\ S_1=10\ ,\ S_2=16\ ,\ S_3=0 \qquad (17)$$

وتعتبر هذه النقطة نقطة حل أفضل حيث أنه عند $X_1=o\ ,\ X_2=7$ نجـد أن قيمة دالة الهدف Z تحسنت من $Z = 0$ في النقطة الأول إلى $Z = 21$ عند النقطة الثانية.

- ويمكن مباشرة اشتقاق هذا الحل من جدول (٣-٦) كما هو موضح فـي الجدول التالي:

جدول (٣-٧)

المتغير الداخل

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	
(1)	المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	الحل	
(2)	Z	1	-2	0	0	0	3	21	
(3)	S_1	0	2	0	1	0	-1	3	3/2 = 1.5
(4)	S_2	0	8	0	0	1	2	30	30/8 = 3.5
(5)	S_3	0	0	1	0	0	1	7	——

المتغير الخارج المتغير الداخل

٣- حيث تم تكوين جدول (٣-٧) على النحو التالي:

أ- بالنسبة لعناصر العمود المحوري في جدول (٣-٦) أصبح في الجدول (٣-٧) جميع عناصره تساوى صفر ماعدا العنصر المحوري أصبح يساوى واحد.

ب- بالنسبة لعناصر الصف المحوري في جدول (٣-٦) أصبح في الجدول (٣-٧) نفس العناصر بعد قسمة كل عنصر على قيمة العنصر المحوري.

ج- يتم حساب باقي قيم العناصر في جدول (٣-٧) من جدول (٣-٦) باستخدام المعادلة التالية:

(18) (قيمة العنصر) في جدول (٣-٧) = (قيمة العنصر المناظر) في جدول (٣-٦) − [(قيمة العنصر المناظر في العمود المحوري × قيمة العنصر المناظر في الصف المحوري) ÷ قيمة العنصر المحوري]

فمثلا بتطبيق المعادلة (18) نجد أن القيمة المناظرة لـ Z في جدول (٣-٧) تم الحصول عليها من جدول (٣-٦) على النحو التالي:

$$(0)-\left[\frac{(-3)\times 7}{1}\right]=21$$

كذلك نجد أن القيمة المناظرة لـ S_1 في جدول (٣-٧) تم الحصول عليها من جدول (٣-٦) على النحو التالي:

$$(10)-\left[\frac{(1)\times 7}{1}\right]=3$$

وهكذا بالنسبة لباقي قيم العناصر في جدول (٣-٧).

ومن جدول (٣-٧) نجد أن

$$Z=21 \quad , \quad X_1=0 \quad , \quad X_2=7$$

وهو نفس الحل عن طريق تكوين المعادلات (16)-(13) باستخدام طريقة جاوس جاردن.

وتسمى عملية كتابة المتغيرات الأساسية بدلالة المتغيرات غير الأساسية وحساب قيمتها من المعادلات المناظرة للقيود الهيكلية بعملية الدوران Pivot Process كما هو سبق إيجاده في المعادلات (16)-(13) وهى المعادلات التي تمثل عملية الانتقال من نقطة حل ممكن إلى نقطة حل ممكن أفضل منها- أي الانتقال من جدول إلى جدول تالي.

رابعاً: من ثالثاً يتضح أن المتغيرات الأساسية هي S_1 , S_2 , X_2 والمتغيرات غير الأساسية X_1 , S_3 . وللانتقال إلى نقطة حل ممكن أفضل، لذا نحدد من جدول (٣-٧) المتغير الداخل من المتغيرات غير الأساسية بفحص معاملاتها في الصف (2). فنجد أن معامل X_1 يساوى(2-) وهو يعتبر أ[illegible]ـر معامل بإشارة سالبة للمتغيرات غير الأساسية، وبالتالي يصبح X_1 المتغير الداخل ويكون العمود (3) هو العمود المحوري. ثم نحدد المتغير الخارج من ضمن المتغيرات الأساسية S_1 , S_2 , X_2 ويتم ذلك عن طريق قسمة العناصر في العمود (8) المناظرة لـ S_1 , S_2 , X_2 على عناصر العمود المحوري المناظرة لها. فتكون أقل نسبة تساوى 3/2 المناظرة للمتغير S_1، بالتالي يصبح المتغير S_1 هو المتغير الخارج كما هو موضح بجدول (٣-٧).

من جدول (٣-٧) ننتقل إلى نقطة حل أساسي ممكن أفضل باستخدام عملية الدوران Pivot Process فنحصل على جدول (٣-٨).

جدول (٣-٨)

	المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	الحل
(1)	المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	الحل
(2)	Z	1	0	0	1	0	2	24
(3)	X_1	0	1	0	1/2	0	-1/2	3/2
(4)	S_2	0	0	0	-4	1	6	18
(5)	X_3	0	0	1	0	0	1	7

من الجدول نجد أن نقطة الحل الحالية هي:

$$X_1= 3/2 \ , \ X_2= 7 \ , \ Z= 24 \qquad (18)$$

وهى تعتبر نقطة أفضل من النقطة السابقة حيث تغيرت قيمة دالة الهـدف Z=21 إلى Z=24 أي تحسنت.

<u>خامساً:</u> لتحديد نقطة حل ممكن أفضل مـن النقطـة الـسابقة نفحـص معـاملات المتغيرات غير الأساسية S_3 , S_1 في الصف (2) بجدول (٣-٨) فنجد أن معاملات المتغيرات غير الأساسية في Z غير سالبة، وهذا يعنى أن هـذا الحل الحالي هو الحل الأمثل حيث أن الهدف هو تعظيم الدالة Z (أمـا إذا كان الهدف تصغير الدالة Z فإننا نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل عنـدما تكون معاملات المتغيرات غير الأساسية في الصف (2) غير موجبـة (أي سالبة أو صفرية)).

ونلاحظ أنه في هذا المثال باستخدام طريقة السمبلكس تم تحديد وفحص ثلاثة نقط طرفية فقط هي:

$$X_1=0 \quad , \quad X_2=0 \quad , \quad Z=0$$

$$X_1=0 \quad , \quad X_2=7 \quad , \quad Z=21$$

$$X_1=3/2 \quad , \quad X_2=7 \quad , \quad Z=24$$

وذلك بدلاً من تحديد وفحص 10 نقط طرفية كما هو سبق توضيحه في جدول (٣-٤).

ويمكن تلخيص خطوات حل نموذج البرمجة الخطية في هذه الحالة عندما تكون جميع القيود الهيكلية الطرف الأيسر في كل منها أقل من أو يساوى (≤) الطرف الأيمن، وجميع عناصر الطرف الأيمن في القيود غير سالبة باستخدام طريقة السمبلكس في الخوارزم التالي:

<u>خوارزم (٣-٢)</u>

الخطوة الأولى:

١- تحويل المتباينات التي تمثل القيود الهيكلية إلى معادلات وذلك بإضافة المتغيرات المكملة S_i. أي تحويل:

$$\sum_{j-1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i \qquad , \quad i=1,2,...,m$$

إلى المعادلات:

$$\sum_{j-1}^{n} a_{ij} X_j + S_i = b_i \qquad , \quad i=1,2,...,m$$

٢- تكوين الجدول المبدئي حيث تمثل المتغيرات المكملة المتغيرات الأساسية S_i، وغير الأساسية X_j لجميع قيم i,j.

الخطوة الثانية:

١-تحديد المتغير الداخل من بين المتغيرات غير الأساسية وليكن رقم (j) الذي يحسن دالة الهدف وهو المتغير الذي له أقل معامل بإشارة سالبة في صف Z في حالة التعظيم (ويكون له أكبر معامل بإشارة موجبة إذا كان الهدف تصغير) وبالتالي تحديد العمود المحوري.

٢-تحديد المتغير الخارج وليكن رقم (i) من بين المتغيرات الأساسية وذلك بقسمة عمود الحل المناظر للمتغيرات الأساسية على عناصر العمود المحوري المناظرة لها (مع استبعاد العناصر غير الموجبة أي السالبة أو الصفرية). وتحديد أقل نسبة فيكون المتغير الأساسي المناظر لها هو المتغير الخارج – وبالتالي تحديد الصف المحوري والعنصر المحوري أيضاً (الناتج من تقاطع العمود j مع الصف i).

الخطوة الثالثة:

١- من الخطوة الثانية فإننا ننتقل إلى نقطة حل أساسي جديد يكون المتغير (j) فيه متغير أساسي والمتغير (i) متغير غير أساسي.

٢- نكون الجدول الثاني من الجدول الأول (الأساسي أو المبدئي) على النحو التالي:

أ- تكون جميع عناصر العمود في الجدول الجديد المناظر للعمود المحوري أصفار باستثناء العنصر المحوري يصبح يساوى واحد.

ب-تكون جميع عناصر الصف في الجدول الجديد المناظر للصف المحوري نفس العناصر في الجدول السابق في الصف المحوري بعد قسمة قيمة كل عنصر منها على قيمة العنصر المحوري.

ج-يتم حساب باقي عناصر الجدول الجديد باستخدام المعادلة (18).

٣- من الجدول الحالي يتحدد الحل الأساسي الحالي.

الخطوة الرابعة:

١- يتم فحص معاملات المتغيرات غير الأساسية في صف Z في الجدول الأخير، فإذا كانت جميعها غير سالبة (موجبة أو أصفار) فإن هذا الحل يعتبر الحل الأمثل في حالة التعظيم (وإذا كان جميع العناصر في الصف Z للمتغيرات غير الأساسية سالبة أو صفرية، فإننا نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل في حالة التصغير).

٢- إذا وجد على الأقل متغير واحد غير أساسي معامله في الصف Z سالب في حالة التعظيم (أو موجب في حالة التصغير)، فهذا يعنى أننا لم نصل إلى الحل الأمثل بعد ويجب الانتقال إلى نقطة حل أساسي أخرى أفضل. ويتم ذلك بإعادة الخطوات اعتبارا من الخطوة الثانية .

وفيما يلي سوف نوضح خطوات الخوارزم من خلال الأمثلة التالية.

مثال (٣-٩):

أوجد قيم X_1, X_2, X_3 بحيث:

$$\begin{aligned} \text{Max. } Z &= 2X_1 + 3X_2 - X_3 \\ \text{S.T.} \quad & 2X_1 + 5X_2 + X_3 \le 26 \\ & 5X_1 + 3X_2 \le 34 \\ & 4X_1 - X_3 \le 19 \\ & X_1, X_2, X_3 \ge 0 \end{aligned}$$

أوجد باستخدام طريقة السمبلكس الحل الأمثل للنموذج، وفقاً لخطوات الخوارزم السابق.

الحل

الخطوة الأولى:

١- تحويل المتباينات الهيكلية إلى معادلات بإضافة المتغيرات المكملة S_1, S_2, S_3 على النحو التالي

$$\begin{aligned} 2X_1 + 5X_2 + X_3 + S_1 &= 26 \\ 5X_1 + 3X_2 + S_2 &= 34 \\ 4X_1 - X_3 + S_3 &= 19 \end{aligned}$$

٢- نكون الجدول المبدئي حيث تمثل المتغيرات الأساسية S_1, S_2, S_3 والمتغيرات X_1, X_2, X_3 متغيرات غير أساسية على النحو التالي:

من الجدول يتضح أن النقطة:

$$(X_1 = X_2 = X_3 = 0, S_1 = 26, S_2 = 3, S_3 = 19, Z = 0)$$

تمثل نقطة حل أساسي مبدئي ممكن.

جدول (٣-٨) الجدول المبدئي رقم (١)

المتغير الداخل – العمود المحوري

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الحل	
Z	1	-2	-3	+1	0	0	0	0	
S_1	0	2	5	1	1	0	0	26	$\frac{26}{5} = 5.2$
S_2	0	5	3	0	0	1	0	34	$\frac{34}{3} = 13.3$
S_3	0	4	0	-1	0	0	1	19	

المتغير الخارج - الصف المحوري

الخطوة الثانية:

١- من الجدول نجد أن معامل المتغير غير الأساسي X_2 في الصف Z أكبر معامل بإشارة سالبة (3-). لذا فإن المتغير X_2 يصبح المتغير الداخل في نقطة الحل التالية.

٢- وبقسمة القيم الثابتة في المعادلات على معاملات X_2 في العمود المحوري نجد أن أقل نسبة هي (5.2) المناظرة للمتغير الأساسي S_1 وبالتالي يصبح S_1 متغير خارج.

الخطوة الثالثة: بإتباع البنود في الخطوة الثالثة نكون الجدول التالي:

جدول (٣-٩) رقم (٢)

المتغير الداخل – العمود المحوري

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الحل	
Z	1	-4/5	0	8/5	3/5	0	0	78/5	
X_1	0	2/5	1	1/5	1/5	0	0	26/5	$\frac{26}{2}=13$
S_2	0	19/5	0	-3/5	-3/5	1	0	92/5	$\frac{92}{19}=4.84$
S_3	0	4	0	-1	0	0	1	19	$\frac{19}{4}=4.75$

المتغير الخارج - الصف المحوري

من الجدول يتضح أن نقطة الحل:

$$(X_1 = 0 , X_2 = \frac{26}{5} , X_3 = 0 , S_1 = 0 , S_2 = \frac{92}{19} , S_3 = \frac{19}{4} , Z = \frac{78}{5})$$

نقطة حل ممكن

الخطوة الرابعة:

من جدول رقم (٢) يتضح أن الحل السابق ليس حل نهائي، حيث مازال معامل المتغير غير الأساسي X_1 سالب وبالتالي إذا أعتبر متغير داخل في الحل التالي سوف يحسن دالة الهدف.

ومن الجدول يتضح أن المتغير الخارج S_3 حيث أنـــه المتغيـــر الأساســـي المناظر لأقل نسبة (19/4). وننتقل إلى نقطة حل ممكنة أخرى تكـــون المتغيـــرات الأساسية فيها هي X_2, S_2, X_1 ، والمتغيرات غير الأساسية X_3, S_1, S_3 .

جدول (٣-١٠) رقم (٣)

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الحل
Z	1	0	0	7/5	3/5	0	1/5	97/5
X_2	0	0	1	6/20	1/5	0	-1/15	33/10
S_2	0	0	0	7/20	-3/5	1	-19/20	7/20
X_1	0	1	0	-1/4	0	0	1/4	19/4

ومن الجدول يتضح أن نقطة الحل:

$$(X_1 = \frac{19}{4}, X_2 = \frac{33}{10}, X_3 = 0,\ S_1 = 0, S_2 = \frac{7}{20}, S_3 = 0)$$

نقطة حل ممكنة ومثلى حيث أن جميع المتغيرات غيـــر الأساســـية (S_1, X_3, S_3) معاملتها في الصف Z قيم غير سالبة. وبالتالي فهذا يعنى أننا وصلنا إلـــى الحـــل الأمثل حيث:

$$Z = \frac{97}{5}\ ,\ X_1 = \frac{19}{4}\ ,\ X_2 = \frac{33}{10}\ ,\ X_3 = 0$$

ملحوظة: يتضح من المثال السابق كفاءة طريقة السمبلكس حيث أنه تـم إيجـاد وفحص 3 نقط طرفية ممكنة فقط في الجداول (3) , (2) , (1) للوصول إلى الحل الأمثل. أما بدون استخدام طريقة السمبلكس فكان يتطلب ذلـك تحديد وفحص عدد 20 نقطة طرفية بعضها ممكن وبعضها غير ممكـن (حيث $C_3^6 = \frac{6!}{3!\,3!} = 20$).

مثال (٣-١٠): أعتبر نموذج البرمجة الخطية التالي

أوجد قيم X_1, X_2, X_3 بحيث

$$\begin{aligned} \text{Min.}Z &= X_1 - 3X_2 - 2X_3 \\ \text{S.T.}\quad & 3X_1 - X_2 + 2X_3 \le 7 \\ & -2X_1 + 4X_2 \le 12 \\ & -4X_1 + 3X_2 + 8X_3 \le 10 \\ & X_1 , X_2 , X_3 \ge 0 \end{aligned}$$

الحل: بإتباع الخطوات في خوارزم (٣-٢) نحصل على الحل الأمثـل باسـتخدام طريقة السمبلكس على النحو الموضح في الجداول المتتالية التالية:

ويتضح من الجدول (٣-١٤) أن الحل الأمثل للنموذج على النحو التالي:

$$Z = \frac{-151}{90} \quad , \quad X_1 = \frac{26}{5} \quad , \quad X_2 = \frac{28}{5} \quad , \quad X_3 = \frac{7}{4}$$

جدول (٣-١١)　　　　المتغير الداخل – العمود المحوري

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الحل	
Z	1	-1	3	2	0	0	0	0	
S_1	0	3	-1	2	1	0	0	7	—
S_2	0	-2	4	0	0	1	0	12	12/4 = 3
S_3	0	-4	3	8	0	0	1	10	10/3 = 3.3

المتغير الخارج - الصف المحوري

جدول (٣-١٢)　　　　المتغير الداخل – العمود المحوري

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الحل	
Z	1	1/2	0	2	0	-3/4	0	-9	
S_1	0	5/2	0	2	1	1/4	0	10	10/2 = 5
X_2	0	-2/4	1	0	0	1/4	0	12	—
S_3	0	-5/2	0	8	0	-3/4	1	10	1/8

المتغير الخارج - الصف المحوري

جدول (٣-١٣)

المتغير الداخل – العمود المحوري

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الحل	
Z	1	9/8	0	0	0	-9/16	-1/4	-37/4	
S_1	0	15/8	0	0	1	7/16	-1/4	39/4	156/5
X_2	0	-2/4	1	0	0	1/4	0	92/5	–
X_3	0	-5/16	0	1	0	-3/32	1/8	19	–

المتغير الخارج - الصف المحوري

جدول (٣-١٤)

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الحل
Z	1	0	0	0	-3/5	-33/40	-1/10	-151/90
X_1	0	1	0	0	8/15	7/30	-2/15	26/5
X_2	0	0	1	0	4/15	11/30	1/15	28/5
X_3	0	0	0	1	1/3	-43/446	23/192	7/4

ملحوظة: ومما هو جدير بالملاحظة بالنسبة لطريقة السمبلكس أن المتغير الذي يتم خروجه في أي عملية دوران لا يتم اختياره كمتغير داخل في أي عملية دوران أخرى تالية (أو بعبارة أخرى المتغير الخارج في أي نقطة حل لا يتم اختياره كمتغير داخل في أي نقطة حل أخرى تالية). وهذا يرجع إلى شروط الأمثلية المبنية عليها طريقة السمبلكس.

وفي الفصلين التاليين سوف نتناول الحالة الثانية عندما تكون بعض (أو كل) القيود الهيكلية في صورة متباينات الطرف الأيسر في كل منها أكبر من أو يساوى الطرف الأيمن وبعضها في شكل معادلات. والنماذج في هذه الحالة يمكن حلها باستخدام أحدى الأسلوبين التاليين:

- أسلوب M.
- أسلوب المرحلتين.

(٣-٤) أسلوب M M-Technique

في الفصل السابق تناولنا طريقة السمبلكس لحل نماذج البرمجة الخطية عندما يكون الطرف الأيسر لكل قيد من القيود الهيكلية أقل من أو يساوى الطرف الأيمن لهذا القيد، حيث يمثل الطرف الأيمن مقدار ثابت غير سالب.

وفي هذه الحالة كان تحديد نقطة حل مبدئي ممكن (متاح) بسيط ويتم تحديد هذه النقطة بوضع قيم جميع المتغيرات القرارية تساوى قيم صفرية، وأن تأخذ المتغيرات المكملة القيم المناظرة لها في الطرف الأيمن، كما هو موضح في الجدول المبدئي (الأساسي).

أما عندما يكون واحد على الأقل من القيود الهيكلية في صورة معادلة أو متباينة فيها الطرف الأيسر" أكبر من أو يساوى" الطرف الأيمن حيث يمثل الطرف الأيمن مقادير غير سالبة، في هذه الحالة يكون لدينا مشكلة في تحديد نقطة حل مبدئي ممكن Feasible Basic Solution. وبعد تحديد نقطة الحل المبدئية الممكنة يمكن تطبيق طريقة السمبلكس السابق توضيحها في الفصل السابق لتحديد الحل الأمثل.

ويمكن الوصول إلى نقطة حل مبدئية ممكنة إذا وجدت (لأنه في بعض النماذج التي يتم صياغتها قد لا توجد نقطة حل ممكنة) بأحد أسلوبين:

١- أسلوب الـ "M"

٢- أسلوب المرحلتين.

وفي هذا الفصل سوف نتناول أسلوب "M" لتحديد نقطة حل مبدئية ممكنة (أن وجدت).

ويتلخص هذا الأسلوب في إضافة متغير غير سالب يسمى بالمتغير المصطنع Artificial variable إلى الطرف الأيسر للقيد الهيكلي في شكل معادلة. أما بالنسبة للقيد الهيكلي الذي في شكل متباينة (≥) فأنه يتم طرح متغير مكمل وإضافة متغير مصطنع للطرف الأيسر للمتباينة. وسوف نرمز للمتغير المصطنع بالرمز R ويتم إضافة المتغيرات المصطنعة لدالة الهدف بمعامل (-M) في حالة التعظيم أو بمعامل (+M) إذا كان الهدف تصغير، حيث M مقدار موجب كبير جداً أي $M \to \infty$ يطلق عليه أسم التكلفة الضائعة Penalty Cost. بحيث تمثل المتغيرات المصطنعة في نقطة الحل المبدئية (وفي حالة إذا كان القيد يحتوى على متغير مكمل ومتغير مصطنع، فإنه يأخذ المتغير المصطنع في الحل المبدئي) ثم يتم التعبير عن المتغيرات الأساسية (المصطنعة والمكملة) في نقطة الحل المبدئي بدلالة المتغيرات غير الأساسية (القرارية والمكملة) في دالة الهدف ويتم إتباع خطوات طريقة السمبلكس في الفصل السابق فإذا أمكن خروج جميع المتغيرات المصطنعة في أي خطوة من خطوات الحل فهذا يعنى أنه يوجد نقطة حل مبدئية ممكنة يمكن الوصول منها باستخدام جداول السمبلكس إلى الحل الأمثل.

أما في حالة عدم إمكانية خروج واحد على الأقل من المتغيرات المصطنعة فهذا يعنى أنه لا يوجد نقطة حل ممكنة أي عدم وجود منطقة (فئة) حلول ممكنة، أي أن فئة الحلول الممكنة تكون فئة خالية. وهذا يعنى عدم إمكانية تحقيق بعض أو كل القيود (الهيكلية وعدم السالبية) معاً.

وسوف نوضح هذا الأسلوب من خلال المثال التالي:

مثال (٣-١١):

أوجد X_1,X_2 بحيث

$$Max.Z = 3X_1 + 2X_2 \quad (1)$$

$$S.T. \quad 3X_1 + X_2 = 3 \quad (2)$$

$$4X_1 + 3X_2 \ge 6 \quad (3)$$

$$X_1 + 2X_2 \le 3 \quad (4)$$

$$X_1 , X_2 \ge 0 \quad (5)$$

الحل

أولاً: بما أن القيود الهيكلية من (4)-(2)، القيد (2) في شكل معادلة لذا نضيف له متغير مصطنع ونشير له بالرمز R_1 فيصبح على النحو:

$$3X_1 + X_2 + R_1 = 3 \quad (6)$$

كذلك نجد أن القيد (3) في شكل متباينة "≥" لذا يتم طرح متغير مكمل S_2 وإضافة متغير مصطنع R_2 فيصبح على النحو:

$$4X_1 + 3X_2 - S_2 + R_2 = 6 \quad (7)$$

أما القيد (4) في شكل المتباينة "≤" لذا نضيف متغير مكمل S_3، فيصبح القيد على النحو:

$$X_1 + 2X_2 + S_3 = 3 \quad (8)$$

تضاف المتغيرات المصطنعة للدالة Z بمعاملات (-M) على النحو التالي:

$$Max.Z = 3X_1 + 2X_2 - MR_1 - MR_2 \quad (9)$$

ثانياً :

١. إذا اعتبرنا المتغيرات R_1,R_2,S_3 متغيرات أساسية والمتغيرات X_1,X_2,S_2 متغيرات غير أساسية في نقطة الحل المبدئية.

٢. نعبر عن المتغيرات الأساسية بدلالة المتغيرات غير الأساسية كما هو موضح في المعادلات (8)-(6) على النحو التالي:

$$R_1 = 3 - 3X_1 - X_2 \qquad (10)$$
$$R_2 = 6 - 4X_1 - 3X_2 + S_2 \qquad (11)$$
$$S_3 = 3 - X_1 - 2X_2 \qquad (12)$$

٣. نعوض في دالة الهدف (9) عن المتغيرات الأساسية R_1,R_2,S_3 بدلالة المتغيرات غير الأساسية X_1,X_2,S_2 من المعادلات (12)-(10) على النحو التالي:

$$\begin{aligned} Max.Z &= 3X_1 + 2X_2 - M(3 - 3X_1 - X_2) - \\ &\quad M(6 - 4X_1 - 3X_2 + S_2) \\ &= (3 + 7M)X_1 + (2 + 4M)X_2 - M\,S_2 - 9M \\ &\longrightarrow \end{aligned}$$

$$Z - (3 + 7M)X_1 - (2 + 4M)X_2 + M\,S_2 = -9M \qquad (13)$$

ثالثاً: باستخدام القيود (8)- (6)، والدالة Z بعد تحويلها إلى معادلة في (13) نكون الجدول الأساسي المبدئي على النحو الموضح في الجدول التالي:

ومن الجدول نجد أن نقطة الحل المبدئية (غير الممكنة) هي:

$$(X_1 = 0\,, X_2 = 0\,, R_1 = 3\,, R_2 = 6\,, S_3 = 3\,, S_2 = 0) \quad (14)$$

جدول (٣-١٤)

المتغير الداخل

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_2	S_3	R_1	R_2	الحل	
Z	1	-(3+7M)	-(2+4M)	M	0	0	0	-9M	
R_1	0	3	1	0	0	1	0	3	3/3 = 1
R_2	0	4	3	-1	0	0	1	6	6/4 = 1.5
S_3	0	1	2	0	1	0	0	3	3/1 = 3

المتغير الخارج

ومن الجدول يتضح أن المتغير غير الأساسي X_1 إذا دخل الحل سوف يحسن قيمة دالة الهدف حيث أن معامل X_1 في الصف Z يساوى (3+7M) – ، كذلك المتغير الأساسي R_1 يناظر أقل نسبة وبالتالي فإن المتغير الخارج R_1 وننتقل إلى نقطة حل أفضل في الجدول التالي :

جدول (٣-١٥)

المتغير الداخل

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_2	S_3	R_1	R_2	الحل	
Z	1	0	-(3+5M)/3	M	0	(3+7M)/3	0	3-2M	
X_1	0	1	1/3	0	0	1/3	0	1	3
R_2	0	0	5/3	-1	0	-4/3	1	2	6/5
S_3	0	0	5/3	0	1	-1/3	0	2	6/5

المتغير الخارج

من الجدول يتضح أن نقطة الحل (غير الممكن):

$$(Z = (3 - 2M), X_1 = 1, X_2 = 0, S_2 = 0, S_3 = 2, R_1 = 0, R_2 = 2) \quad (15)$$

وهى نقطة حل أفضل من نقطة الحل (14)، كذلك نجد أن المتغير غير الأساسي X_2 إذا دخل في الحل سوف يحسن الحل. أي يحسن قيمة دالة الهدف ومن الجدول نجد أن أقل نسبة مناظرة للمتغير الأساسي R_2 أو المناظرة للمتغير الأساسي S_3.

وبما أننا نرغب في خروج المتغيرات المصطنعة من الحل لذا تكون الأولوية في الخروج للمتغير المصطنع R_2. وننتقل إلى نقطة حل أخرى يكون فيها المتغيرات X_1,X_2,S_3 متغيرات أساسية والمتغيرات S_2,R_1,R_2 متغيرات غير أساسية وإجراء عملية الدوران ونكون الجدول التالي:

جدول (٣-١٦)

المتغير الداخل

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_2	S_3	R_1	R_2	الحل
Z	1	0	0	-3/5	0	(1+5M)/5	(3+5M)/5	21/5
X_1	0	1	0	1/5	0	3/5	-1/5	3/5
X_2	0	0	1	-3/5	0	-4/5	3/5	6/5
S_3	0	0	0	1	1	1	-1	0

المتغير الخارج

من الجدول يتضح أن:

١. الحل الحالي:

$$X_1 = \frac{3}{5},\ X_2 = \frac{6}{5},\ S_3 = 0,\ S_2 = 0,\ R_1 = 0,\ R_2 = 0,\ Z = \frac{21}{5}$$

يعتبر حل أفضل من الحل السابق حيث أن قيمة دالة الهدف Z زادت من القيمة (3-2M) إلى القيمة 21/5.

٢. يعتبر الحل الحالي $X_1 = \frac{3}{5},\ X_2 = \frac{6}{5},\ Z = \frac{21}{5}$ حل ممكن حيث أن جميع المتغيرات المصطنعة أصبحت متغيرات غير أساسية (أي خرجت جميع المتغيرات المصطنعة من الحل).

٣. ومن الجدول السابق يتضح أن معامل المتغير غير الأساسي S_2 مازال قيمته سالبة في صف Z، وهذا يعنى أننا لم نصل إلى الحل الأمثل بعد حيث أن الهدف هو تعظيم الدالة Z. لذا يتم الانتقال إلى نقطة حل جديدة حيث يمثل المتغيرات الأساسية فيها X_1, X_2, S_2 على النحو الموضح في الجدول التالي:

جدول (٣-١٧)

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_2	S_3	R_1	R_2	الحل
Z	1	0	0	0	3/5	4+5M/5	M	21/5
X_1	0	1	0	0	-1/5	2/5	0	3/5
X_2	0	0	1	0	3/5	-1/5	0	6/5
S_2	0	0	0	1	1	1	-1	0

من الجدول يتضح أن معاملات المتغيرات غير الأساسية S_3,R_1,R_2 قيم غير سالبة في الصف Z . وبالتالي فأن الحل:

$$Z=\frac{21}{5},\ X_1=\frac{3}{5},\ X_2=\frac{6}{5},\ S_2=0$$

يعتبر الحل الأمثل.

ملحوظة: من الجدولين (٣-١٦)، (٣-١٧) نجد أن قيمة دالة الهدف Z=21/5 ويرجع ذلك إلى أن قيمة المتغير الخارج (S_3) في جدول (٣-١٦) تساوى صفر. وسوف نتناول هذه الحالة بالتفصيل في الفصل (٣-٦).

<u>مثال (٣-١٣)</u>:

باستخدام أسلوب M أوجد الحل الأمثل للنموذج التالي:

$$\begin{aligned} &\text{Max.}Z = 5X_1 + 3X_2 \\ &\text{S.T.} \quad 7X_1 + 3X_2 \geq 21 \\ &\quad 4X_1 + 7X_2 = 28 \\ &\quad 9X_1 + 5X_2 \leq 54 \\ &\quad X_1 , X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

الحل: ١- يتم إضافة المتغيرات المكملة S والمصطنعة R على النحو التالي:

$$\begin{aligned} &\text{Max.}Z = 5X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_3 - MR_1 - MR_2 \\ &\text{S.T.} \quad 7X_1 + 3X_2 - S_1 + R_1 = 21 \\ &\quad 4X_1 + 7X_2 + R_2 = 28 \\ &\quad 9X_1 + 5X_2 + S_3 = 54 \\ &\quad X_1 , X_2 , S_1 , S_3 , R_1 , R_2 \geq 0 \end{aligned}$$

٢- من المعادلات نجد أن:

$$R_1 = 21 - 7X_1 - 3X_2 + S_1$$
$$R_2 = 28 - 4X_1 - 7X_2$$

٣- بالتعويض بقيم R_1, R_2 في المعادلتين السابقتين في دالة الهدف Z نجد أن:

$$Z = 5X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_3 - M[21 - 7X_1 - 3X_2 + S_1]$$
$$- M[28 - 4X_1 - 7X_2] \longrightarrow$$
$$Z = (5 + 7M + 4M)X_1 + (3 + 3M + 7M)X_2 - MS_1 - 49M$$
$$\longrightarrow$$
$$Z - (5 + 7M + 4M)X_1 - (3 + 3M + 7M)X_2 + MS_1 = -49M$$

٤- نكون الجدول المبدئي على النحو الموضح في الجدول التالي:

جدول (٣-١٨)　　　　المتغير الداخل

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_1	S_3	R_1	R_2	الحل
Z	1	-(5+11M)	-(3+10M)	M	0	0	0	-49M
R_1	0	7	3	-1	0	1	0	21
R_2	0	4	7	0	0	0	1	28
S_3	0	9	5	0	1	0	0	45

المتغير الخارج

ومن الجدول يتضح أن المتغير X_1 هو المتغير الداخل في نقطة الحال التالية، والمتغير R_1 هو المتغير الخارج. وننتقل إلى نقطة حل أفضل كما هو موضح في الجدول التالي:

جدول (٣-١٩)

المتغير الداخل

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_1	S_3	R_1	R_2	الحل
Z	1	0	-(6+ 37M)/7	-(5+ 4M)/7	0	(5+ 11M)/7	0	15-16M
X_1	0	1	3/7	-1/7	0	1/7	0	3
R_2	0	0	37/7	4/7	0	-4/7	1	16
S_3	0	0	8/7	9/7	1	-9/7	0	18

المتغير الخارج

ومن الجدول يتضح أن المتغير X_2 هو المتغير الداخل والخارج R_2. وننتقل إلى حل آخر أفضل كما هو موضح في الجدول التالي :

جدول (٣-٢٠)

المتغير الداخل

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_1	S_3	R_1	R_2	الحل
Z	1	0	0	-161/7(37)	0	(8572+ 4551M) /7(37)	(6+37M)/37	651/3
X_1	0	1	0	-7/(37)	0	7/37	-3/37	63/3
X_2	0	0	1	4/37	0	-4/37	7/37	112/3
S_3	0	0	0	43/37	1	-310/148	-8/37	538/3

المتغير الخارج

ومن الجدول يتضح أن المتغير الداخل S_1 والمتغير الخارج هو S_3. وننتقل إلى نقطة حل آخر أفضل كما هو موضح في الجدول التالي:

جدول (٣-٢١)

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_1	S_3	R_1	R_2	الحل
Z	1	0	0	0	161/7(43)	(1018+ 4551M)/7(37)	(6+37M)/37	25.37
X_1	0	1	0	0	7/43	1687/3182	-5/43	4.07
X_2	0	0	1	0	-4/43	482/1519	9/43	1.67
S_1	0	0	0	1	259/301	259/148	-2072/11137	12.5

ومن الجدول يتضح أننا حصلنا على الحل الأمثل عندما:

$$X_1 = 4.07 \ , \ X_2 = 1.67 \ , \ Z = 25.37$$

<u>خوارزم (٣-٣)</u>

الخطوة الأولى: ١- إضافة متغير مصطنع وطرح متغير مكمل من الطرف الأيسر للمتباينات التي في صورة "≥"، وإضافة متغير مصطنع للطرف الأيسر للقيد الذي في شكل معادلة "="، هذا بالإضافة إلى إضافة متغيرات مكملة للقيود في الشكل "≤" فتصبح القيود الهيكلية على النحو التالي:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j - S_i + R_i = b_i \quad , \; i = 1, 2, ..., I_1 \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j + R_i = b_i \quad , \; i = I_1 + 1, I_1 + 2, ..., I_2 \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j + S_i = b_i \quad i = I_2 + 1, I_2 + 2, ..., m \qquad (3)$$

٢- يتم إضافة المتغيرات المصطنعة لدالة الهدف بمعامل (M-) لكل متغير مصطنع إذا كان الهدف تعظيم دالة الهدف أو بمعامل (M+) إذا كان الهدف تصغير دالة الهدف.

الخطوة الثانية: ١- نعتبر نقطة البداية أن المتغيرات الأساسية هي المتغيرات المصطنعة والمتغيرات المكملة (S_i , R_j).

٢- نعبر عن المتغيرات الأساسية بدلالة المتغيرات غير الأساسية من المعادلات (3)-(1).

٣- نكون الجدول الأساسي (المبدئي) على اعتبار أن المتغيرات الداخلة في الحل هي المتغيرات المصطنعة والمكملة (وفي حالة إذا كان القيد يحتوى على متغير مصطنع ومتغير مكمل، فإنه يأخذ المتغير المصطنع كمتغير داخل في الحل المبدئي).

٤- يتم إجراء عملية الدوران Pivot Process كما هو موضح في خوارزم (٣-٢) وننتقل إلى نقطة حل أفضل.

الخطوة الثالثة: ١- إذا أمكن إخراج جميع المتغيرات المصطنعة أي أصبحت المتغيرات المصطنعة متغيرات غير أساسية والمتغيرات القرارية والمكملة هي المتغيرات الأساسية، فهذا يعنى وجود حل أو أكثر من الحلول الممكنة. ويستخدم خوارزم (٣-٢) ونستمر من حل إلى حل آخر أفضل حتى نصل إلى الحل الأمثل.

٢- أما في حالة عدم إمكانية أخراج جميع المتغيرات المصطنعة أي يوجد متغير واحد على الأقل من المتغيرات المصطنعة متغير أساسي، فهذا يعنى عدم وجود أي حل ممكن أي يحقق جميع القيود الهيكلية معاً- أي لا يوجد حل ممكن للمشكلة.

مثال (٣-١٤): أعتبر نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max.}Z = 5X_1 + 4X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad 5X_1 + 2X_2 \le 10 \qquad (2)$$

$$7X_1 + 5X_2 \ge 35 \qquad (3)$$

$$X_1, X_2 \ge 0 \qquad (4)$$

باستخدام أسلوب M ، أثبت أنه لا يوجد حل للنموذج.

الحل:

الخطوة الأولى: نحول المتباينات في القيود الهيكلية (3)-(2) إلى معادلات بإضافة متغير مكمل للطرف الأيسر للقيد (2) ، وطرح متغير مكمل وإضافة متغير مصطنع للطرف الأيسر للقيد (3)على النحو التالي:

$$5X_1 + 2X_2 + S_1 = 10 \quad (5)$$

$$7X_1 + 5X_2 - S_2 + R_2 = 35 \quad (6)$$

الخطوة الثانية: ١- نضيف المتغير المصطنع R_2 إلى دالة الهدف بالمعامل (-M) على النحو التالي:

$$Z = 5X_1 + 4X_2 - M R_2 \quad (7)$$

٢- نعتبر المتغيرات S_1, R_2 كمتغيرات أساسية وبالتالي المتغيرات X_1, X_2, S_2 متغيرات غير أساسية

٣- نعبر عن المتغير R_2 بدلالات المتغيرات غير الأساسية من المعادلة (6) على النحو التالي:

$$R_2 = 35 - 7X_1 - 5X_2 + S_2 \quad (8)$$

٤- نعوض في الدالة (7) عن قيمة R_2 بقيمته بالطرف الأيمن في (8) على النحو التالي:

$$Z = 5X_1 + 4X_2 - M(35 - 7X_1 - 5X_2 + S_2)$$
$$= (5 + 7M)X_1 + (4 + 5M)X_2 - M S_2 - 35M$$

$$\longrightarrow$$

$$Z - (5 + 7M)X_1 - (4 + 5M)X_2 + M S_2 = -35M \quad (9)$$

٥- نكون الجدول المبدئي باستخدام المعادلات (9) ، (5) ، (6) على النحو التالي:

جدول (٣-٢٢)

المتغير الداخل

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_2	الحل	
Z	1	-(5+7M)	-(4+5M)	0	M	0	-35M	
S_1	0	5	2	1	0	0	10	10/5 = 2
R_2	0	7	5	0	-1	1	35	35/7 = 5

المتغير الخارج

جدول (٣-٢٣)

المتغير الداخل

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_2	الحل	
Z	1	0	$-\frac{10+11M}{5}$	$\frac{5+7M}{5}$	M	0	10-21M	
X_1	0	1	2/5	1/5	0	0	2	$\frac{2}{2/5}=5$
S_3	0	0	11/5	-7/5	-1	1	21	$\frac{21}{11/5}=9.5$

المتغير الخارج

جدول (٣-٢٤)

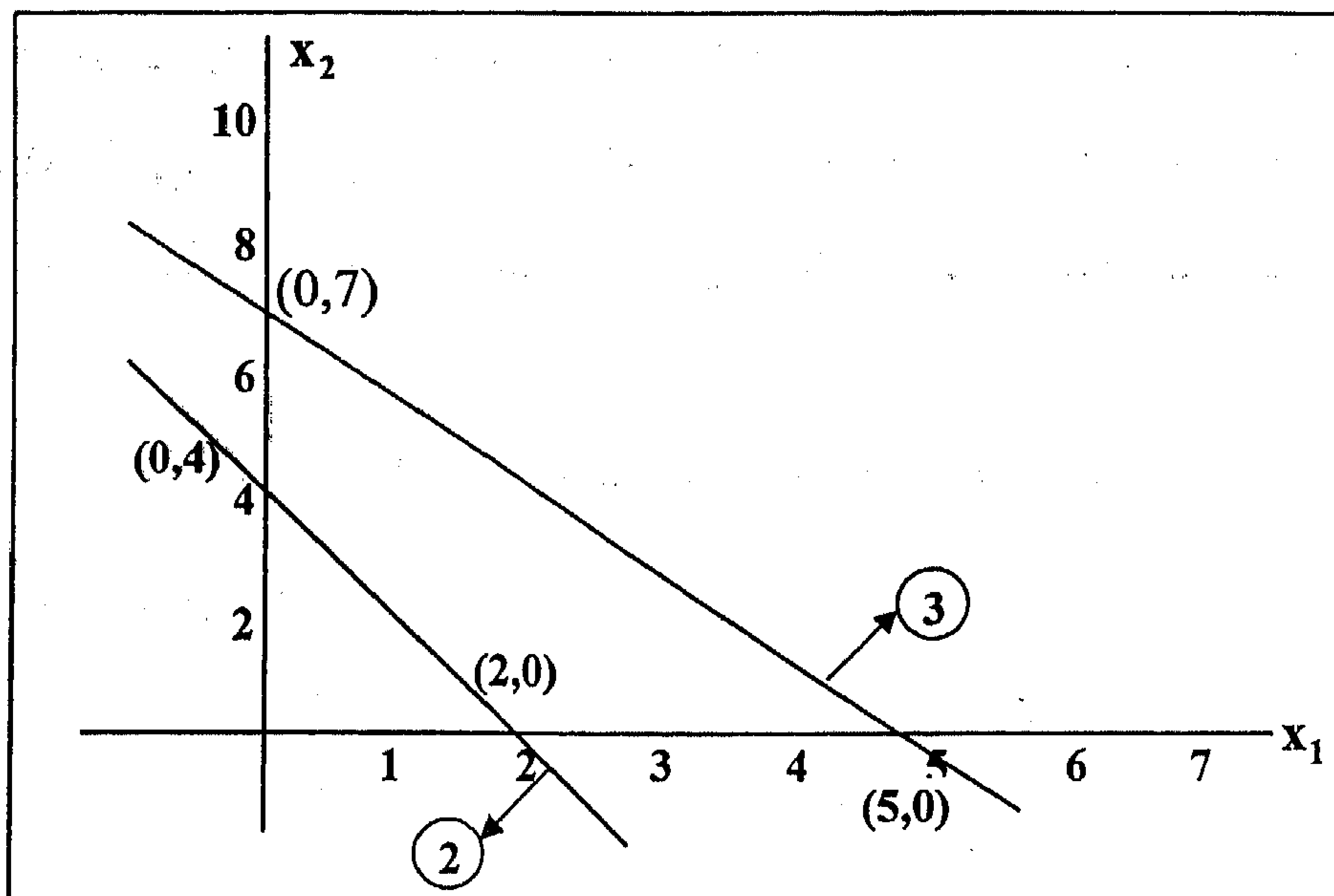
المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_2	الحل
Z	1	$\frac{10+11M}{2}$	0	$\frac{4+5M}{2}$	M	0	20-10M
X_2	0	5/2	1	1/2	0	0	5
R_2	0	-11/2	0	-9/2	-1	1	10

ومن الجدول يتضح أننا وصلنا للحل الأمثل حيث المتغيرات الأساسية

$$X_2 = 5, \quad R_2 = 10, \quad Z = 20\text{-}10M$$

أي تم الوصول للحل الأمثل ولم نستطيع أخراج المتغير المصطنع R_2، حيث يعتبر المتغير المصطنع متغير أساسي، وبالتالي هذا يعنى أنه لا يوجد حل باستخدام البرمجة الخطية. ويتضح من الرسم أنه لا توجد منطقة حلول ممكنة.

شكل (٣-٨)



(٣-٥) أسلوب المرحلتين Two-Phase Technique

من الفصل السابق يتضح أن استخدام أسلوب الـ"M" لحل نماذج البرمجة الخطية التي تتضمن متغيرات مصطنعة يعتبر أسلوب كفء Efficient Technique إذا كان الحل يتم يدوياً في حالة المشاكل صغيرة الحجم. أما في حالة المشاكل ذات الحجم الكبير فإن حلها يتطلب استخدام الكمبيوتر، وفي هذه الحالة فأن استخدام أسلوب الـ"M" يتطلب تحديد القيمة العددية للمقدار "M"، ويترتب على تحديد قيمة معنية لـM وجود عديد من المشاكل.

لذلك يعتبر أسلوب الـM أسلوب غير كفأ في حالة استخدام الكمبيوتر في حل النماذج التي تتضمن متغيرات مصطنعة. وفي هذه الحالة نستخدم أسلوب آخر لتحديد نقطة حل مبدئية ممكنة. ويسمى هذا الأسلوب بأسلوب المرحلتين. وبأستخدام هذا الأسلوب يتم حل النموذج على مرحلتين:

المرحلة الأولى: يتم تحديد نقطة حل ممكن أن وجدت. وفي حالة عدم إمكانية إيجاد نقطة حل مبدئية ممكنة فإنه يتم إيقاف الحل وهنا لا يمكن حل المشكلة باستخدام السمبلكس.

المرحلة الثانية: يتم تحديد الحل الأمثل في حالة وجود نقطة حل ممكنة.

<u>المرحلة الأولى</u>: وفي هذه المرحلة يتم تكوين دالة هدف جديدة، تكون دالة في المتغيرات المصطنعة فقط وسوف نشير لها بالرمز R حيث $R = \sum R_i$ ويكون الهدف تصغير الدالة R تحت القيود الهيكلية وقيود عدم السالبة للمشكلة الأصلية.

ثم حل هذا النموذج باستخدام طريقة السمبلكس السابق عرضها في الفصل(٣-٣). فإذا وصلنا للحل الأمثل للنموذج في هذه المرحلة بحيث R=0 فهـذا يعنـى أننـا حصلنا على نقطة حل ممكن للنموذج الأصلي وتعتبر نقطة حل مبدئية. ثـم ننتقـل للمرحلة الثانية. أما إذا كانت قيمة R أكبر من الصفر فهذا يعنى أنه لا يوجد حـل ممكن لهذه المشكلة (أو بعبارة أخرى عدم إمكانيـة إخـراج جميـع المتغيـرات المصطنعة).

<u>المرحلة الثانية</u>: يعتبر الحل الأمثل في المرحلة الأولى عندما R=0 نقطـة حـل مبدئية ممكنة للنموذج الأصلي ونستمر في حل النموذج الأصلي باستخدام طريقـة السمبلكس المقدمة في الفصل (٣-٣) كما هو سبق توضيحه باسـتخدام خـوارزم (٣-٢).

<u>مثال (٣-١٥)</u>: اعتبر نموذج (٣-١٠) باستخدام أسلوب المرحلتين أوجد الحـل الأمثل باستخدام أسلوب المرحلتين.

الحل: المرحلة الأولى:

١- تحويل المتباينات إلى متساويات بإضافة متغيرات مكملة ومصطنعة على النحو التالي:

$$3X_1 + X_2 + R_1 = 3$$
$$4X_1 + 3X_2 - S_2 + R_2 = 6$$
$$X_1 + 2X_2 + S_3 = 3$$
$$X_1, X_2, S_2, S_3, R_1, R_2 \geq 0$$

٢- تكوين النموذج التالي

$$\text{Min.}R = R_1 + R_2 \quad (1)$$

$$\text{S.T} \quad 3X_1 + X_2 + R_1 = 3 \quad (2)$$

$$4X_1 + 3X_2 - S_2 + R_2 = 6 \quad (3)$$

$$X_1 + 2X_2 + S_3 = 3 \quad (4)$$

$$X_1, X_2, S_2, S_3, R_1, R_2 \geq 0$$

٣- إذا اعتبرنا المتغيرات R_1, R_2, S_3 متغيرات أساسية والمتغيرات X_1, X_2, S_2 متغيرات غير أساسية من المعادلات (4)-(2) نعبر عن المتغيرات الأساسية المصطنعة بدلالات المتغيرات غير الأساسية على النحو التالي:

$$R_1 = 3 - 3X_1 - X_2 \quad (5)$$

$$R_2 = 6 - 4X_1 - 3X_2 + S_2 \quad (6)$$

نعوض في دالة الهدف في (1) عن R_2, R_1 بدلالة المتغيرات غير الأساسية في (6) , (5) فيصبح النموذج على النحو التالي:

$$\text{Min.}R = 3 - 3X_1 - X_2 + 6 - 4X_1 - 3X_2 + S_2$$

$$\text{Min.}R = 9 - 7X_1 - 4X_2 + S_2 \quad (7)$$

$$\text{S.T.} \quad 3X_1 + X_2 + R_1 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 - S_2 + R_2 = 6$$

$$X_1 + 2X_2 + S_3 = 3$$

$$X_1, X_2, S_2, S_3, R_1, R_2 \geq 0$$

٤- باستخدام طريقة السمبلكس [خوارزم (٣-٢)] نقوم بحل النموذج أعلاه على النحو الموضح في الجداول التالية:

جدول (٣- ٢٥)

المتغير الداخل: X_1

المتغيرات الأساسية	R	X_1	X_2	S_2	S_3	R_1	R_2	الحل	
R	1	7	4	-1	0	0	0	9	
R_1	0	3	1	0	0	1	0	3	3/3=1
R_2	0	4	3	-1	0	0	1	6	6/4=1.5
S_2	0	1	2	0	1	0	0	3	3/1=3

المتغير الخارج: R_1

جدول (٣-٢٦)

المتغير الداخل: X_2

المتغيرات الأساسية	R	X_1	X_2	S_2	S_3	R_1	R_2	الحل	
R	1	0	5/3	-1	0	-7/3	0	2	
X_1	0	1	1/3	0	0	1/3	0	1	$\frac{1}{1/3}=3$
R_2	0	0	5/3	-1	0	-4/3	1	2	6/5
S_3	0	0	5/3	0	1	-1/3	0	2	6/5

المتغير الخارج: R_2

جدول (٣-٢٧)

المتغيرات الأساسية	R	X_1	X_2	S_2	S_3	R_1	R_2	الحل
R	1	1	0	0	0	-31/15	-1	0
X_1	0	1	1	1/5	0	3/5	-1	3/5
X_2	0	0	1	-3/5	0	-4/5	3/5	6/5
S_3	0	0	0	1	1	1	-1	0

من الجدول السابق يتضح أننا وصلنا إلى نقطة حل مبدئية ممكنة حيث $R=0$, $X_1=3/5$, $X_2=6/5$، وبالتالي ننتقل إلى المرحلة الثانية من الحل.

٥- من الجدول السابق نجد أن المتغيرات الأساسية هي X_1, X_2, S_3 والمتغيرات غير الأساسية هي S_2, R_1, R_2. نعبر عن المتغيرات الأساسية بدلالة المتغيرات غير الأساسية من الجدول على النحو التالي:

$$X_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{5}S_2 - \frac{3}{5}R_1 + R_2$$

$$= \frac{1}{5}(3 - S_2 - 3R_1 + R_2) \qquad (8)$$

$$X_2 = \frac{6}{5} + \frac{3}{5}S_2 + \frac{4}{5}R_1 - \frac{3}{5}R_2$$

$$= \frac{1}{5}(6 + 3S_2 + 4R_1 - 3R_2) \qquad (9)$$

وبما أن R_1,R_2 متغيرات غير أساسية أي أن $R_1=R_2=0$ بالتعويض في (9) بـ $R_1=R_2=0$ فإن:

$$X_1 = \frac{1}{5}(3 - S_2) \qquad (10)$$

$$X_2 = \frac{1}{5}(6 + 3S_2) \qquad (11)$$

وبالتعويض بقيم X_1,X_2 بدلالة قيمة كل من X_1,X_2 في (10)، (11) في دالة الهدف Z نجد أن:

$$Z = 3X_1 + 2X_2 = \frac{3}{5}(3 - S_2) + \frac{2}{5}(6 + 3S_2)$$

$$= \frac{21}{5} + \frac{3}{5}S_2 \qquad (12)$$

٦- أعتبر الجدول السابق وأستبدل الصف الممثلة لـ R بدالة الهدف Z بقيمتها في (12) ويتم حذف الأعمدة الممثلة للمتغيرات المصطنعة فيصبح نقطة الحل الممكنة المبدئية كما هو موضح بالجدول (٣-٢٨).

جدول (٣-٢٨) المتغير الداخل

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_2	S_3	الحل	
Z	1	0	0	-3/5	0	21/5	
X_1	0	1	0	1/5	0	3/5	3
X_2	0	0	1	-3/5	0	6/5	—
S_3	0	0	0	1	1	0	0

المتغير الخارج

وبما أن الهدف الأساسي من النموذج تعظيم دالة الهدف. بالتالي فإن S_2 يكون المتغير الداخل والمتغير الخارج S_3 وننتقل إلى نقطة حل أخرى كما هو موضح في الجدول (٣-٢٩).

٧- نكون الجدول التالي حيث يعتبر X_1, X_2, S_2 متغيرات أساسية والمتغير غير الأساسي هو S_3 على النحو التالي

جدول (٣-٢٩)

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_2	S_3	الحل
Z	1	0	0	0	3/5	21/5
X_1	0	1	0	0	-1/5	3/5
X_2	0	0	1	0	3/5	6/5
S_2	0	0	0	1	1	0

ومن الجدول يتضح أن الحل بالجدول هو الحل الأمثل:

$$X_1 = 3/5 , \quad X_2 = 6/5 , \quad Z = 21/5$$

ومما سبق يمكن تقديم خطوات حل نموذج البرمجة الخطية في حالة وجود متغيرات مصطنعة باستخدام أسلوب المرحلتين من خلال الخوارزم التالي:

خوارزم (٣-٤)

الخطوة الأولى: المرحلة الأولى

١. إضافة المتغيرات المكملة والمصطنعة للطرف الأيسر للقيود وتحويلها إلى معادلات كما سبق توضح ذلك في الفصل السابق.

٢. البدء في المرحلة الأولى بتكوين النموذج التالي:

$$\text{Min } R = \sum_{i} R_i$$

تحت مجموعة القيود للنموذج الأصلي.

٣. اعتبار المتغيرات المصطنعة والمكملة متغيرات أساسية، والمتغيرات القرارية أو القرارية والمكملة متغيرات غير أساسية.

- ثم كتابة المتغيرات المصطنعة بدلالة المتغيرات غير الأساسية.
- التعبير عن المتغيرات الأساسية المصطنعة في دالة الهدف R بدلالة المتغيرات غير الأساسية.

٤. حل النموذج في هذه المرحلة باستخدام خوارزم (٣-٢):

أ-إذا وصلنا للحل الأمثل للنموذج وكانت قيمة R=0 فهذا يعنى أننا حصلنا على نقطة حل ممكنة للنموذج الأصلي. وبالحصول على نقطة حل مبدئي ممكن تنتهي المرحلة الأولى وننتقل لمرحلة الثانية.

ب-إذا كانت قيمة R > 0 فهذا يعنى عدم إمكانية إخراج جميع المتغيرات المصطنعة من الحل وبالتالي لا توجد نقطة حل ممكنة للمشكلة الأصلية. وينتهي الحل عند هذه المرحلة.

الخطوة الثانية: المرحلة الثانية

٥. من الجدول الأخير في المرحلة الأولى نعبر عن المتغيرات الأساسية بدلالة المتغيرات غير الأساسية.

٦. نعبر عن دالة الهدف في المشكلة الأصلية Z بدلالة المتغيرات غير الأساسية – ثم نستبدل الصف R بـ Z في الجدول الأخير في المرحلة الأولى.

٧. نستمر في الحل بإجراء عملية الدوران Pivot Process باستخدام الخوارزم (٣-٢) حتى نصل إلى الحل الأمثل.

ملحوظة: دائماً الهدف المرحلة الأولى $\text{Min} \sum R_i$ بغض النظر عن هدف المشكلة الأصلية Max. Z أو Min. Z.

مثال (٣-١٦): أعتبر نموذج البرمجة الخطية التالي

$$\text{Max}.\, Z = 3X_1 + 4X_2 + X_3 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 - 2X_3 \geq 8 \qquad (2)$$

$$-X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 3 \qquad (3)$$

$$X_1 \leq 9 \qquad (4)$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0 \qquad (5)$$

باستخدام أسلوب المرحلتين أوجد الحل الأمثل للنموذج.

الحل: ١- إضافة المتغيرات المكملة والمصطنعة للقيود الهيكلية (4)-(2) على النحو التالي:

$$X_1 + X_2 - 2X_3 - S_1 + R_1 = 8$$

$$-X_1 + 2X_2 + X_3 + S_2 = 3$$

$$X_1 + S_3 = 9$$

٢- نكون النموذج في المرحلة الأولى على النحو التالي:

$$\text{Min } R = R_1$$

$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 - 2X_3 - S_1 + R_1 = 8$$

$$\longrightarrow R_1 = 8 - X_1 - X_2 + 2X_3 + S_1$$

$$-X_1 + 2X_2 + X_3 + S_2 = 3$$

$$X_1 + S_3 = 9$$

$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3, R_1 \geq 0$$

٣- يتم حل النموذج أعلاه باستخدام خوارزم (٣-٤) على النحو الموضح في الجداول التالية:

ومن الجدول السابق يتضح أن R=0 ، والنقطة:

$$X_1 = 8 \; , \; X_2 = 0 \; , \; S_2 = 11 \; , \; S_3 = 1$$

نقطة حل مبدئية ممكنة وبالتالي تنتهي المرحلة الأولى من الحل وننتقل للمرحلة الثانية.

جدول (٣-٣٠)

المتغير الداخل: X_1

المتغيرات الأساسية	R	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R_1	الحل	
R	1	+1	+1	-2	-1	0	0	0	8	
R_1	0	1	1	-2	-1	0	0	1	8	8
R_2	0	-1	2	1	0	1	0	0	3	—
S_2	0	1	0	0	0	0	1	0	9	9

المتغير الخارج: R_1

جدول (٣-٣١)

المتغيرات الأساسية	R	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R_1	الحل
R	1	0	0	0	0	0	0	-1	0
X_1	0	1	1	-2	-1	0	0	1	8
S_2	0	0	3	-1	-1	1	0	1	11
S_3	0	0	-1	2	1	0	1	-1	1

٤-من الجدول السابق نجد أن المتغيرات الأساسية هي X_1, S_2, S_3 والمتغيرات غير الأساسية هي X_2, X_3, S_1, R_1. تعبر عن المتغيرات الأساسية بدلالة المتغيرات غير الأساسية على النحو التالي:

$$X_1 + X_2 - 2X_3 - S_1 + R_1 = 8 \longrightarrow$$
$$X_1 = 8 - X_2 + 2X_3 + S_1 - R_1 \qquad (6)$$

$$3X_2 - X_3 - S_1 + S_2 = 11 \longrightarrow$$
$$S_2 = 11 - 3X_2 + X_3 + S_1 \qquad (7)$$

$$-X_2 + 2X_3 + S_1 + S_3 - R_1 = 1 \longrightarrow$$
$$S_3 = 1 + X_2 - 2X_3 - S_1 \qquad (8)$$

وبما أن R_1 متغير غير أساسي إذن $R_1=0$، بالتالي من (8)-(6) نجد أن:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= 8 - X_2 + 2X_3 + S_1 \\ S_2 &= 11 - 3X_2 + X_3 + S_1 \\ S_3 &= 1 + X_2 - 2X_3 - S_1 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

بالتعويض في دالة الهدف الأصلية Z والمتغيرات القرارية بالمتغيرات غير الأساسية على النحو التالي:

$$\begin{aligned} Z &= 3X_1 + 4X_2 + X_3 \\ &= 3(8 - X_2 + 2X_3 + S_1) + 4X_2 + X_3 \\ &= 24 + X_2 + 7X_3 + 3S_1 \longrightarrow \end{aligned}$$

$$Z - X_2 - 7X_3 - 3S_1 = 24 \quad (10)$$

٥- في الجدول الأخير يتم حذف عمود R_1 واستبدال الصف المناظر لـ R بالصف الممثلة لـ Z في المعادلة (10) ونبد المرحلة الثانية من الحل على النحو الموضح في الجدول التالي:

جدول (٣-٣٢) — المتغير الداخل

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الحل
Z	1	0	-1	-7	-3	0	0	24
X_1	0	1	1	-2	-1	0	0	8
S_2	0	0	3	-1	-1	1	0	11
S_3	0	0	-1	(2)	1	0	1	1

المتغير الخارج

جدول (٣-٣٣)

المتغير الداخل

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الحل
Z	1	0	-9/2	0	1/2	0	7/2	55/2
X_1	0	1	0	0	0	0	1	9
S_2	0	0	5/2	0	-1/2	1	1/2	23/2
X_3	0	0	-1/2	1	1/2	0	1/2	1/2

المتغير الخارج

جدول (٣-٣٤)

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الحل
Z	1	0	0	0	19/10	9/5	44/10	482/10
X_1	0	1	0	0	0	0	1	9
X_2	0	0	1	0	-1/5	2/5	1/5	23/5
X_3	0	0	0	1	4/10	1/5	6/10	28/10

من الجدول يتضح أن معاملات المتغيرات غير الأساسية (S_1, S_2, S_3) في دالة الهدف Z قيم غير سالبة. وبالتالي فأننا وصلنا للحل الأمثل حيث:

$$X_1 = 9\,,\ X_2 = \frac{23}{5},\ X_3 = \frac{28}{10},\ Z = \frac{482}{10}$$

(٣-٦) حالات خاصة Special Cases

في كثير من التطبيقات العملية لطريقة السمبلكس تواجهنا بعض الحالات الخاصة يجب فحصها لأهمية خصائصها من الناحية التطبيقية - كما سوف نوضح بعض هذه الحالات فيما يلي - وسوف نقدم هذه الحالات من خلال بعض الأمثلة الرقمية .

الحالة الأولى: القيود الزائدة (غير فعالة) Redundant Constraints

في بعض التطبيقات قد توجد قيود زائدة (غير فعالة) بمعنى أنها غير مؤثرة في منطقة الحلول الممكنة وبالتالي غير مؤثرة في الحل الأمثل بمعنى أنه إذا تم حذف هذه القيود لا يؤثر على منطقة الحلول الممكنة وبالتالي لا يؤثر على الحل الأمثل.

مثال (٣-١٧): أعتبر نموذج البرمجة الخطية التالي

$$Max.Z = 3X_1 + 5X_2$$

$$S.T. \quad X_1 + X_2 \le 100 \qquad (1)$$

$$5X_1 + 10X_2 \le 400 \qquad (2)$$

$$6X_1 + 8X_2 \le 440 \qquad (3)$$

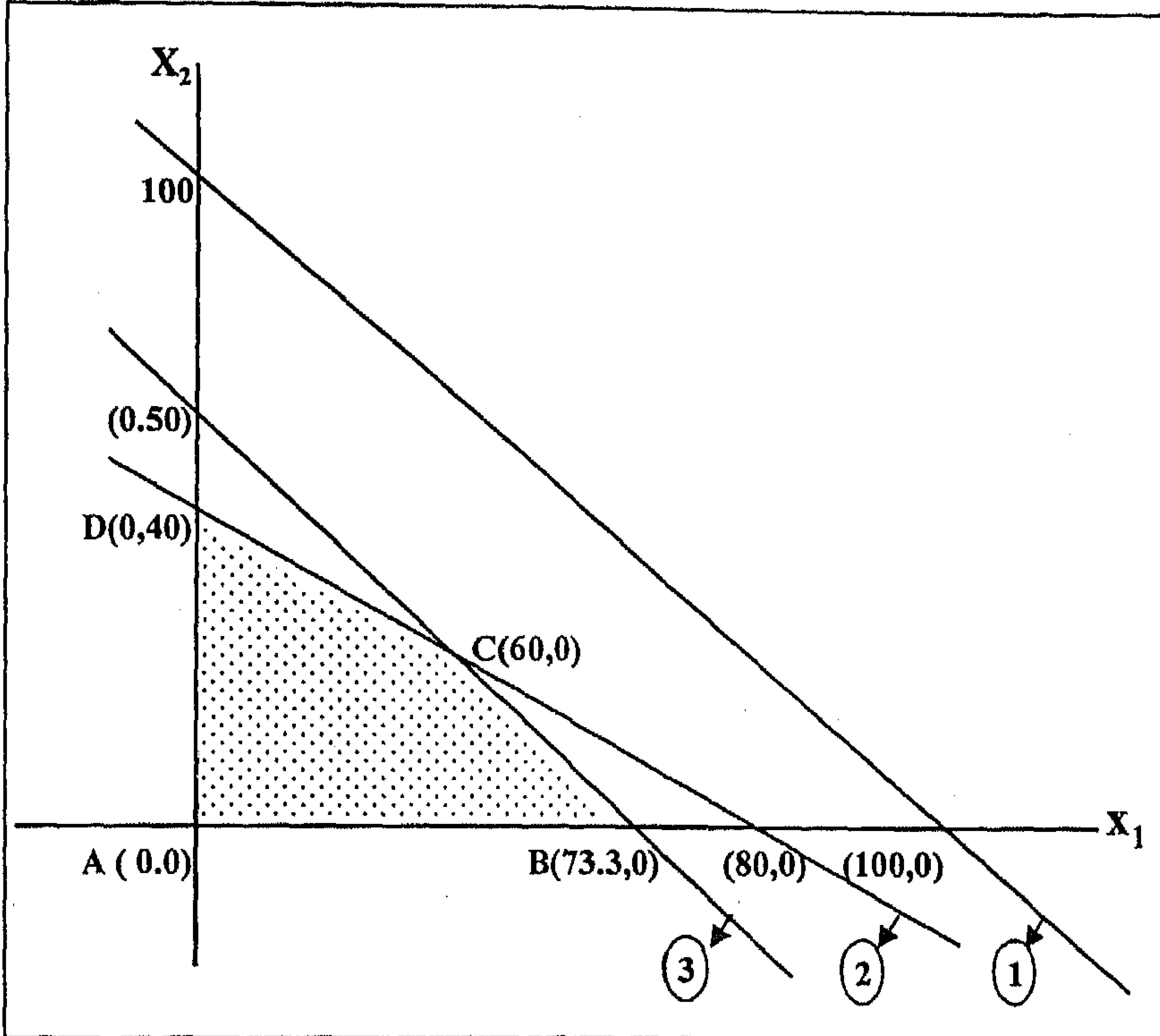
$$X_1 , X_2 \ge 0$$

١. وضح بيانيا أن القيد (1) قيد زائد Redundant.

٢. حل النموذج باستخدام السمبلكس ثم حدد أي القيود (3)-(1) يعتبر قيد زائد (غير فعال).

الحل: ١- يوضح الشكل التالي منطقة الحلول الممكنة

شكل (٣-٩)



من الشكل يتضح أن الحل الأمثل عند النقطة C حيث:

$$Z = 230 , X_1 = 60 , X_2 = 10$$

ويتضح من الشكل أن القيد (1) قيد زائد حيث أنه إذا تم إلغاء هذا القيد لم يــؤثر على منطقة الحلول الممكنة ABCD وبالتالي لم يؤثر على الحل الأمثل.

كذلك يتضح من الرسم أن الخط المناظر للقيد (1) لا يتقاطع مع كل خــط منــاظر للقيد(2) أو (3) في وجود شرط عدم السالبة $X_1, X_2 \geq 0$.

٢- وبإضافة المتغيرات المكملة إلى الطرف الأيسر للقيود (3)-(1) نجد أن

$$X_1 + X_2 + S_1 = 100$$
$$5X_1 + 10X_2 + S_2 = 400$$
$$6X_1 + 8X_2 + S_3 = 440$$

وبحل النموذج باستخدام طريقة السمبلكس كما هو موضح في الجداول التالية:

جدول (٣-٣٥)　　المتغير الداخل ← X_2

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	الحل
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
S_1	0	1	1	1	0	0	100
الخارج ← S_2	0	5	(10)	0	1	0	400
S_3	0	6	8	0	0	1	440

جدول (٣-٣٦)　　المتغير الداخل ← X_1

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	الحل
Z	1	-1/2	0	0	5/10	0	200
S_1	0	1/2	0	1	-1/10	0	60
X_2	0	5/10	1	0	1/10	0	40
الخارج ← S_3	0	(2)	0	0	-8/10	1	120

جدول (٣-٣٧)

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	الحل
Z	1	0	0	0	3/16	1/4	230
S_1	0	0	0	1	1/10	1/4	30
X_2	0	0	1	0	3/10	-1/4	10
X_1	0	1	0	0	-4/10	1/2	60

من الجدول السابق نجد أن الحل الأمثل:

$$X_1 = 60 \quad , \quad X_2 = 10 \quad , \quad Z = 230$$

ويتضح من الجدول السابق أيضاً :

١. الحل الأمثل يكون أحد المتغيرات الأساسية فيه المتغير المكمل المناظر للقيد الزائد(S_1) بقيمة موجبة وهذا يعنى أن القيد الزائد يتحقق في شكل متباينة.

٢. في حالة وجود متغير مكمل في الحل الأمثل مناظر لقيد ما يمكن اختبار هذا القيد زائد أم لا على النحو التالي:

أ- إذا كانت نقط تقاطع المستقيم المناظر لهذا القيد مع كل قيد من القيود الهيكلية السابقة يحقق شرط عدم السالبية فهذا يعنى أن هذا القيد غير زائد وأنه مؤثر في منطقة الحلول الممكنة.

ب- إذا كانت نقط تقاطع هذا المستقيم المناظر لهذا القيد مع باقي القيود الهيكلية لا تحقق شرط عدم السالبية فهذا يعنى أن هذا القيد قيد زائد - والشكل السابق يوضح ذلك حيث أن القيد (1) نقط تقاطعه مع القيدين (2) ،(3) لا تحقق شروط عدم السالبية.

مثال (٣-١٨): ١- باستخدام طريقة السمبلكس أوجد الحل الأمثل للنموذج التالي

$$\text{Max.}Z = 5X_1 + 6X_2 + X_3$$

$$\text{S.T.}\quad 7X_1 + 5X_2 + X_3 \le 35 \qquad (1)$$

$$5X_1 + 10X_2 + 2X_3 \le 50 \qquad (2)$$

$$X_2 + X_3 \le 100 \qquad (3)$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

٢- أختبر أي القيود الهيكلية السابقة (3) – (1) يعتبر قيد زائد أن وجد.

الحل: يتم تحويل المتباينات (3) – (1) إلى معادلات بإضافة المتغيرات المكملة S_1, S_2, S_3 ثم تكوين الجدول على النحو التالي.

جدول (٣-٣٨)　　المتغير الداخل ← X_2

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الحل
Z	1	-5	-6	-1	0	0	0	0
S_1	0	7	5	1	1	0	0	35
الخارج ← S_2	0	5	(10)	2	0	1	0	50
S_3	0	0	1	1	0	0	1	100

جدول (٣-٣٩)

المتغير الداخل ← X_1

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الحل
Z	1	-2	0	1/5	0	6/10	0	30
الخارج ← S_1	0	9/2	0	0	1	-1/2	0	10
S_2	0	5/10	1	2/10	0	1/10	0	5
S_3	0	-1/2	0	4/5	0	-1/10	1	95

جدول (٣-٤٠)

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الحل
Z	1	0	0	1/5	9/9	34/90	0	310/9
X_1	0	1	0	0	2/9	-1/9	0	20/9
X_2	0	0	1	2/10	-1/9	14/90	0	35/9
S_3	0	0	0	4/5	1/9	-28/180	1	865/9

من الجدول الأخير نجد أن:

١. الحل الأمثل:

$$X_1 = 20/9 , X_2 = 35/9 , Z = 310/9$$

٢. نجد أن S_3 المتغير المكمل المناظر للقيد رقم (3) قيمته قيمة موجبة حيث $S_3 = 865/9$ - أي أن القيد رقم (3) يتحقق في شكل متباينة في الحل الأمثل - فهذا يدل على أنه ممكن أن يكون القيد الثالث قيد زائد.

٣. ولاختبار هل القيد الثالث قيد زائد أم لا.

أ- نجد أن تقاطع القيد (3) مع (1) بعد تحويلهم إلى معادلات نقط لا تحقق شرط عدم السالبية

$$\left\{\begin{array}{l}\left(X_1 = 0 \ , \ X_2 = \dfrac{-65}{4} \ , \ X_3 = \dfrac{465}{2}\right), \\ \left(X_1 = \dfrac{-65}{7} \ , \ X_2 = 0 \ , \ X_3 = 100\right), \\ \left(X_1 = \dfrac{-465}{7} \ , \ X_2 = 100 \ , \ X_3 = 0\right)\end{array}\right\}$$

ب- كذلك نجد أن نقط تقاطع القيد (3) مع (2) بعد تحويلهم إلى معادلات نقط لا تحقق شرط عدم السالبية أيضاً

$$\left\{\begin{array}{l}\left(X_1 = 0 \ , \ X_2 = \dfrac{-150}{8} \ , \ X_3 = \dfrac{950}{8}\right), \\ (X_1 = -30 \ , \ X_2 = 0 \ , \ X_3 = 100), \\ (X_1 = -190 \ , \ X_2 = 100 \ , \ X_3 = 0)\end{array}\right\}$$

الحالة الثانية: الحلول المثلى البديلة

Alternative optimal solutions

تحدث هذه الحالة عندما يكون أحد القيود المتحقق في صور متساوية Binding Constraint في الحل الأمثل موازى لدالة الهدف. في هذه الحالة تكون القيمة المثلى لدالة الهدف عند أكثر من نقطة حل أساسي واحده. وتسمى نقط الحل المثلى الأساسية بالحلول المثلى الأساسية البديلة. هذا بالإضافة أن أي متوسط مرجح Weighted Average للحلول الأساسية المثلى يكون حل أمثل بديل غير أساسي Non-Basic Solution، وبالتالي يكون لدينا عدد لا نهائي من الحلول المثلى البديلة.

مثال (٣-١٩): أعتبر نموذج البرمجة الخطية التالي

$$Max.Z = X_1 + 2X_2 \qquad (1)$$

$$S.T. \quad 9X_1 + 6X_2 \leq 54 \qquad (2)$$

$$5X_1 + 10X_2 \leq 50 \qquad (3)$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

١. حدد أي القيود الهيكلية موازي لدالة الهدف.

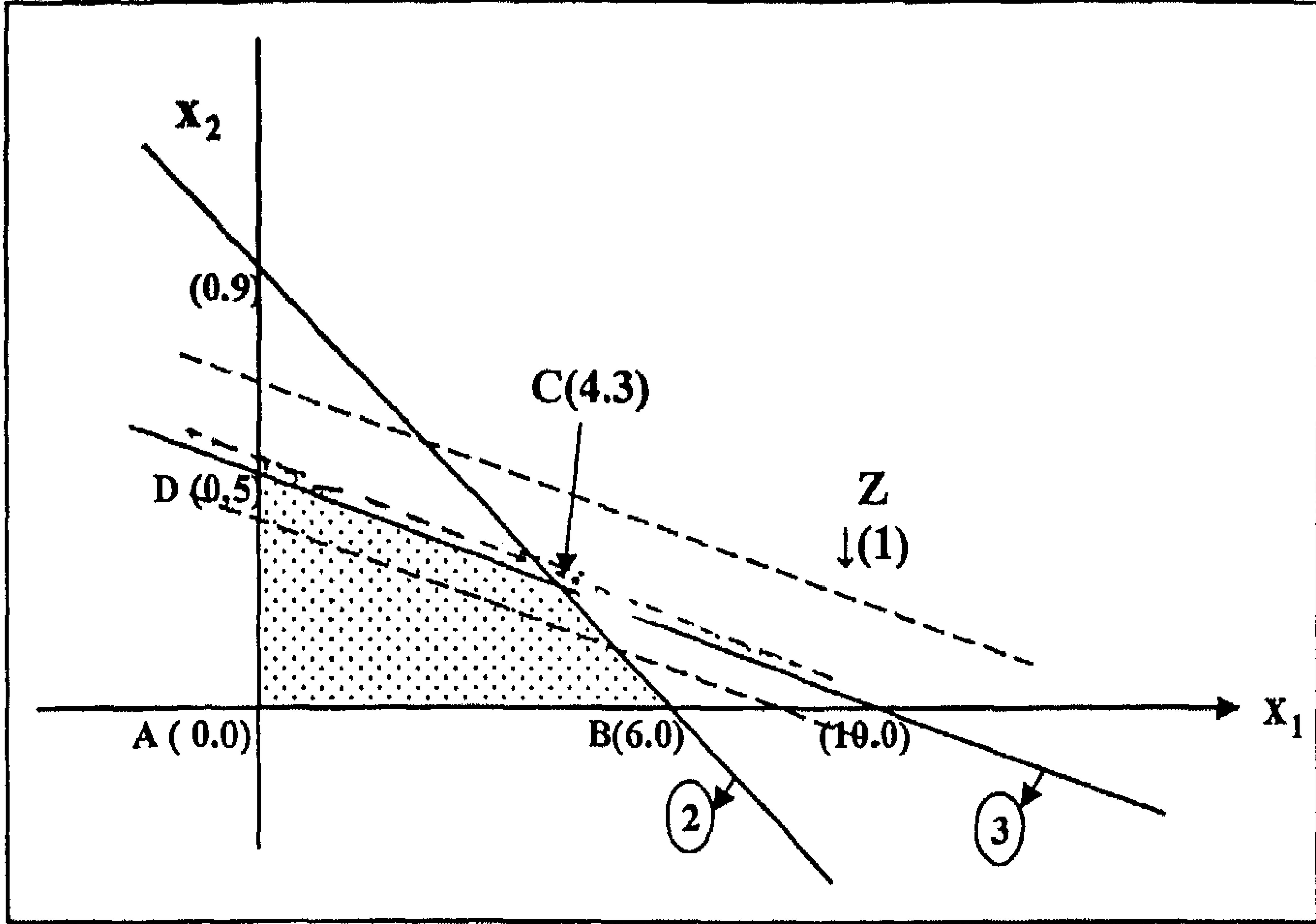
٢. أرسم منطقة الحلول الممكنة كذلك دالة الهدف ثم حدد الحلول المثلى الأساسية البديلة.

٣. أوجد حلول مثلى أخرى غير أساسية.

الحل: ١- من النموذج نجد أن دالة الهدف في (1) موازية للقيد (3).

٢- الشكل التالي يوضح منطقة الحلول الممكنة كذلك دالة الهدف Z.

شكل (٣-١٠)



٣-من الرسم يتضح أنه يوجد نقطتين مختلفتين للحل الأمثل هما C , D حيث أنه عند النقطة C نجد أن:

$$X_1 = 4 \ \ , \ \ X_2 = 3 \ \ , \ \ Z = 10$$

كذلك عند النقطة D نجد أن

$$X_1 = 0 \ \ , \ \ X_2 = 5 \ \ , \ \ Z = 10$$

حيث تمثل كل من النقطة D , C حلول أساسية مثلى.

ويمكن الحصول على عدد غير نهائي من الحلول المثلى غير الأساسية تقع على الخط الواصل بين D , C أي قيمة Z عند كل نقطة تقع على هذا الخط متساوية بحيث Z = 10.

وفي هذه الحالة يمكن الحصول على النقطة (X_1^*, X_2^*)من العلاقة

$$X_1^* = \lambda(4) + (1-\lambda)(0)$$
$$X_2^* = \lambda(3) + (1-\lambda)(5)$$
$$0 \le \lambda \le 1$$

حيث تمثل (X_1^*, X_2^*) توليفات خطية (أنظر الفصل (٨-١)). وبصفة عامة إذا كان عدد المتغيرات القرارية يساوى N ويوجد عدد K من الحلول المثلى الأساسية البديلة فإن نقط الحلول المثلى البديلة غير الأساسية يتم حسابها على النحو التالي:

$$X_j^* = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i X_j^{(i)} \qquad , \; j = 1,2,\ldots,n \quad , \; i = 1,2,\ldots,K$$

$$0 \le \lambda_i \le 1 \quad , \quad \sum_{i=1}^{K} \lambda_i = 1$$

الحالة الثالثة: الحلول غير المحددة Unbounded solutions

وتحدث هذه الحالة عندما تكون منطقة الحلول الممكنة (فراغ الحل Solution Space) منطقة مفتوحة أي تكون غير محددة Unbounded وفي هذه الحالة ممكن أن تزيد دالة الهدف زيادة غير محددة Indefinite.

ورغم أن منطقة الحلول الممكنة غير المحددة تؤدى إلى زيادة (أو نقص) دالة الهدف زيادة غير محددة (أو نقص غير محدود). ولكن قد توجد بعض الحالات تكون فيها دالة الهدف قيمة محددة. وفيما يلي سوف نوضح ذلك من خلال بعض الأمثلة.

ويمكن التعرف على أن فراغ الحل غير المحدد بيانياً من الرسم ولكن فـي حالة وجود أكثر من متغيرين قراريين يكون فراغ الحل غير محدد إذا كان فـي أي مرحلة من مراحل السمبلكس عناصر العمود الممثل للمتغير الداخل جميعهـا قـيم سالبة أو سالبة وأصفار – في هذه الحالة يكون فراغ الحل غير محدد.

وسوف نوضح ذلك من خلال الأمثلة التالية:

<u>مثال (٣-٢٠)</u>: أعتبر نموذج البرمجة الخطية التالي

$$\text{Max.} Z = 5X_1 + 2X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 \geq 10 \qquad (2)$$

$$-3X_1 + 2X_2 \leq 6 \qquad (3)$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

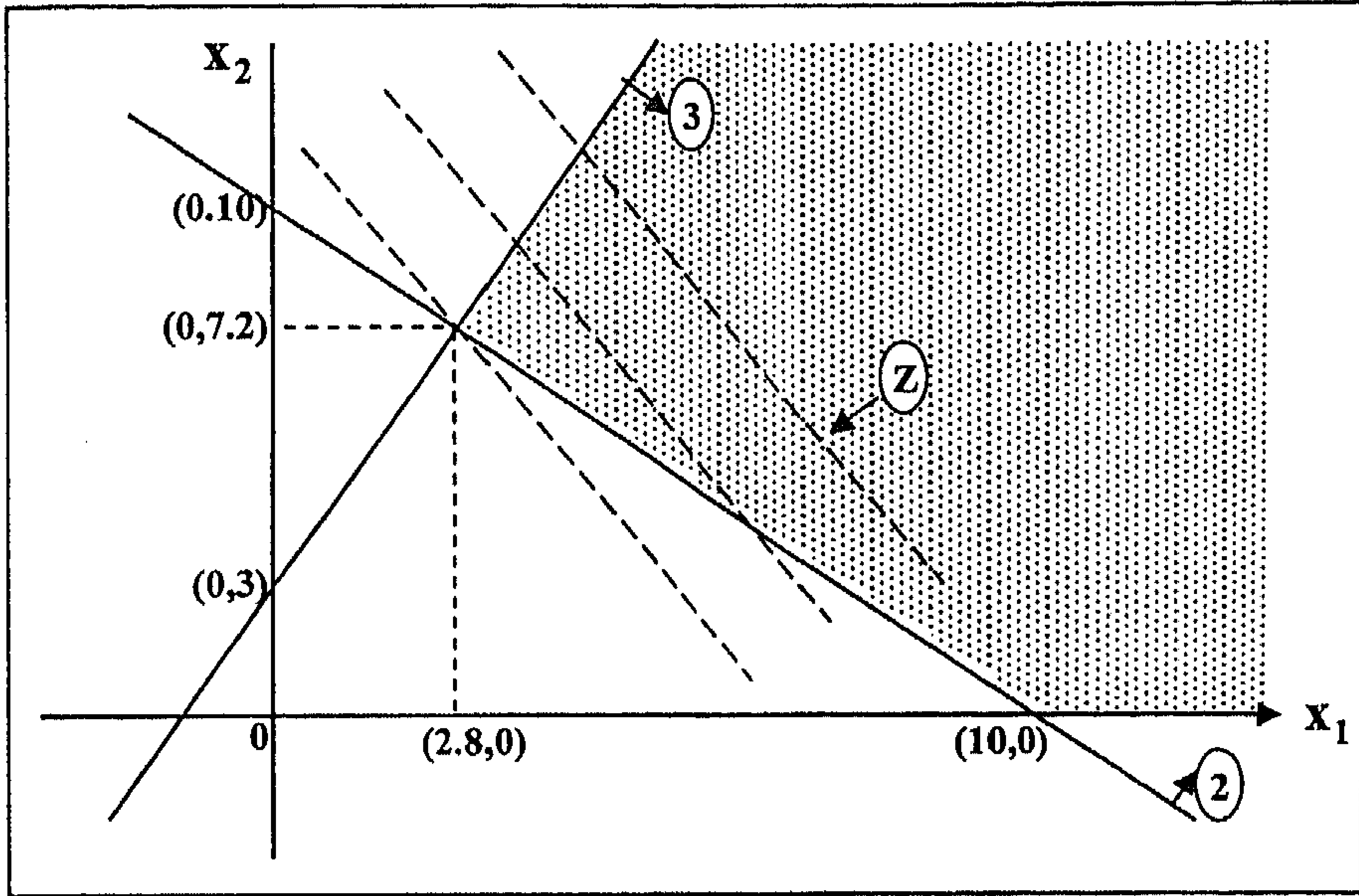
١. أرسم منطقة الحلول وكذلك دالة الهدف Z ووضح أنها غير مقيدة. ومـن الرسم حدد أي المتغيرات القرارية الذي يمكن أن يزيد زيادة غير نهائية.

٢. حول النموذج إلى الصياغة المعيارية Standard Form ثم كون جداول السمبلكس ومن الجداول وضح أنه لا يوجد حل مقيد للنموذج.

الحل: ١- الشكل التالي يوضح منطقة الحلول الممكنة كذلك دالة الهدف Z.

ومن الشكل يتضح أنه كلما دالة الهدف Z تتزايـد تزايـد غيـر محـدد بزيـادة المتغير X_1 تزايد غير محدد نظراً لأن منطقة الحلول الممكنة مفتوحة فـي اتجـاه المتغير X_1.

شكل (٣-١١)



٢- يمكن وضع النموذج في الصياغة المعيارية على النحو التالي

$$Max.Z = 5X_1 + 2X_2 - MR_1$$
$$S.T. \quad X_1 + X_2 - S_1 + R_1 = 10$$
$$-3X_1 + 2X_2 + S_1 = 6$$
$$X_1 , X_2 , S_1 , S_2 , R_1 \geq 0$$

من جدول (٣-٤١) نجد أن المتغير الداخل X_1 ونجد أن العمود المحوري يتضمن عناصر سالبة وهذا يعنى أن منطقة الحلول الممكنة مفتوحة (غير محددة) في اتجاه المتغير X_1.

كذلك نجد أن من جدول (٣-٤٢) أن المتغير الداخل S_1 ولكن العمود المحوري جميع عناصره سالبة لذا يتوقف الحل عند هذا الجدول.

جدول (٣-٤١) المتغير الخارج

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	الحل
Z	1	-(5+M)	-(2+M)	+M	0	0	-10 M
الخارج←R_1	0	(1)	1	-1	0	1	10
S_2	0	-3	2	0	1	0	6

جدول (٣-٤٢) المتغير الخارج

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	الحل
Z	1	0	3	-5	0	(5+M)	50
X_1	0	1	1	-1	0	1	10
S_2	0	0	5	-3	1	3	36

حيث أن دالة الهدف تتزايد زيادة غير محدودة بزيادة قيمة المتغير X_1 .

مثال (٣-٢١): وهذا المثال يوضح أنه قد تكون منطقة الحلول الممكنة منطقة غير محددة Unbounded Feasible Solution Area ولكن الحل الأمثل قيمة محددة Bounded Optimal Solution.

أعتبر نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max.Z = 3X_1 - 4X_2 - X_3$$
$$S.T. \quad 2X_1 - X_2 + X_3 \leq 10$$
$$X_1 - 2X_3 \leq 8$$
$$X_3 \leq 5$$
$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

نضيف المتغيرات المكملة S_1 , S_2 , S_3 للقيود الهيكلية ثم نكون جدول السمبلكس الأساسي كما هو موضح في جدول (٣-٣٩).

ومن جدول (٣-٤٠) نجد أن المتغيرات غير الأساسية X_2 , X_3 , S_1 جميعها غير سالبة. بالتالي فإننا وصلنا للحل الأمثل.

جدول (٣-٤٣)

المتغير الداخل ← X_1

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الحل
Z	1	-3	+4	+1	0	0	0	0
الخارج ← S_1	0	(2)	-1	1	1	0	0	10
S_2	0	1	0	-2	0	1	0	8
S_3	0	0	0	-2	0	0	1	5

جدول (٣-٤٤)

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الحل
Z	1	0	5/2	3/2	3/2	0	0	15
X_1	0	1	-1/2	1/2	1/2	0	0	5
S_2	0	0	1/2			1	0	3
S_3	0	0	0	-2	0	0	1	5

وفي هذه الحالة نجد أن الحل الأمثل $X_1 = 5 , X_2 = 0 , X_3 = 0 , Z = 15$

الحالة الرابعة: عدم وجود حلول ممكنة
Non-existing Feasible Solution

وتحدث هذه الحالة عندما لا توجد نقطة واحدة تحقق جميع القيود (الهيكلية وعدم السالبية) معاً. أو بعبارة أخرى تكون منطقة الحلول الممكنة فئة خالية Empty Set.

وفي حالة المشكلة التي تتضمن على متغيرين قراريين فقط يمكن تحديد هذه الحالة بيانياً. أما في حالة المشاكل التي تتضمن متغيرين أو أكثر من متغيرين قراريين فإنه يمكن تحديد هذه الحالة في حالة الوصول إلى الحل الأمثل ويتضمن هذا الحل متغيرات مصطنعه (في حالة استخدام أسلوب M، أو في حالة انتهاء المرحلة الأولى وقيمة دالة الهدف R في هذه المرحلة قيمة موجبة)، وسوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي:

أعتبر نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max.}Z = 3X_1 + 4X_2$$

$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 \le 5 \qquad (1)$$

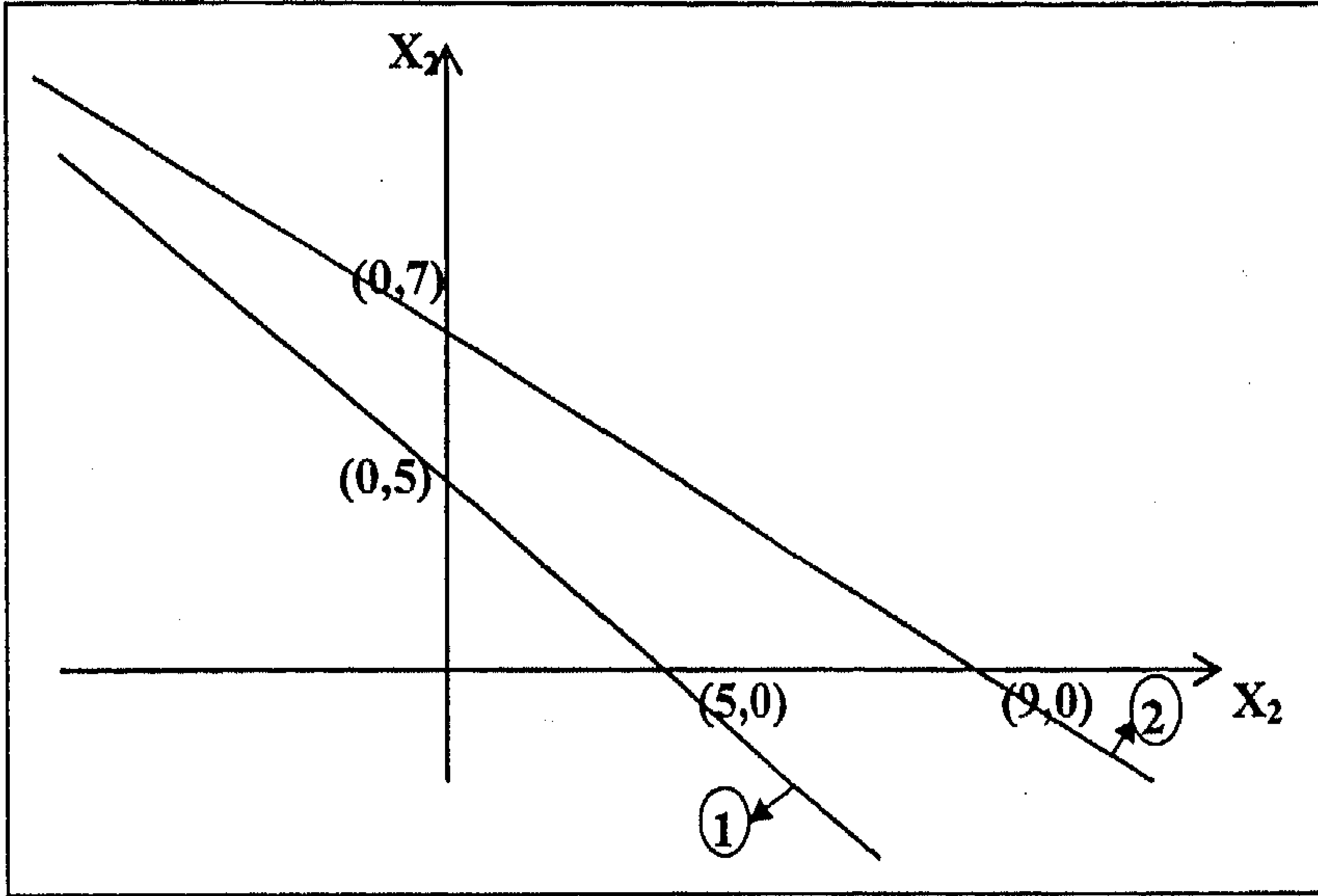
$$7X_1 + 9X_2 \ge 63 \qquad (2)$$

$$X_1 , X_2 \ge 0 \qquad (3)$$

١. وضح بيانياً أنه لا يوجد حلول ممكنة (أي أن منطقة الحلول الممكنة فئة خالية).
٢. باستخدام طريقة السمبلكس وضح أنه لا يوجد حل ممكن للمشكلة.

الحل: الشكل التالي يوضح أن القيود الهيكلية (2) , (1) قيود متعارضة.

شكل (٣-١٢)



٢- بوضع النموذج في الصياغة المعيارية نجد أن

$$Max.Z = 3X_1 + 4X_2 - MR_2$$

$$S.T. \quad X_1 + X_2 + S_1 = 5$$

$$7X_1 + 9X_2 - S_2 + R_2 = 63$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, R_2 \geq 0$$

جدول (٣-٤٥) المتغير الخارج

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_2	الحل
Z	1	-(3+7M)	-(4+9M)	0	+M	0	-63 M
الخارج ← S_1	0	1	1	1	0	0	5
R_2	0	7	9	0	-1	1	63

جدول (٣-٤٦)

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_2	الحل
Z	1	1+2M	0	(4+9M)	M	0	-(18M-20)
X_2	0	1	1	1	0	0	5
R_2	0	-2	0	-9	-1	1	18

من الجدول السابق يتضح أننا وصلنا إلى الحل الأمثل ولكن المتغيرات الأساسية تتضمن المتغير المصطنع R_2. وهذا كما ذكرنا سابقاً في الفصلين (٣-٤)،(٣-٥) أنه لا يوجد أي حل ممكن للمشكلة.

ومما هو جدير بالذكر أن هذا النوع من المشاكل التي تتضمن قيود متعارضة Conflicting Constraints يتم حلها باستخدام أساليب أخرى مثل برمجة الهدف Goal Programming حيث يتم الحصول على أفضل الحلول التوافقية Best Compromise Solutions [48,49].

الحالة الخامسة: التردد Degeneracy

التردد Degeneracy هنا يعنى وجود واحد على الأقل من المتغيرات الأساسية (الداخلة في الحل) قيمته تساوى صفر أو بعبارة أخرى يكون المتغير الخارج في الخطوة التالية وخروجه لم يؤدى إلى تحسين قيمة دالة الهدف في الجدول التالي – ويمكن أن ينتج عن ذلك حدوث دوران Cycling أي الانتقال من جدول إلى آخر أو من حل أساسي إلى حل أساسي آخر دون تحسن في قيمة دالة الهدف. وتستمر هذه الخطوات دون الوصول إلى الحل الأمثل.

ومما هو جدير بالذكر أنه توجد إجراءات Procedures يمكن باستخدامها الخروج من حالة الدوران Cycling إن حدثت [55] وتتضمن هذه الإجراءات في حزم البرامج الجاهزة للأمثلية.

وقد تحدث حالة الاضمحلال أو التردد في إحدى الخطوات ولكن يمكن الخروج منها في الخطوة التالية مباشرة ويسمى الحل في هذه الحالة حل تردد وقتي Temporary Degenerate Solution.

مثال (٣-٢٢): اعتبر نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max.Z = 3X_1 + X_2$$

$$S.T. \quad X_1 - X_2 \geq 0$$

$$X_1 + X_2 \leq 8$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

١. أرسم منطقة الحلول الممكنة – ومن الرسم وضح أنه توجد حلول أساسية مترددة Degenerate Solutions.

٢. حل النموذج باستخدام السمبلكس – وحدد من جداول السمبلكس أنه توجد حلول مترددة.

الحل: ١– الشكل التالي يوضح منطقة الحلول الممكنة. من الشكل يتضح أن النقطة A(0,0) نقطة حل متردد.

٢– نضع النموذج في الصيغة المعيارية على النحو التالي:

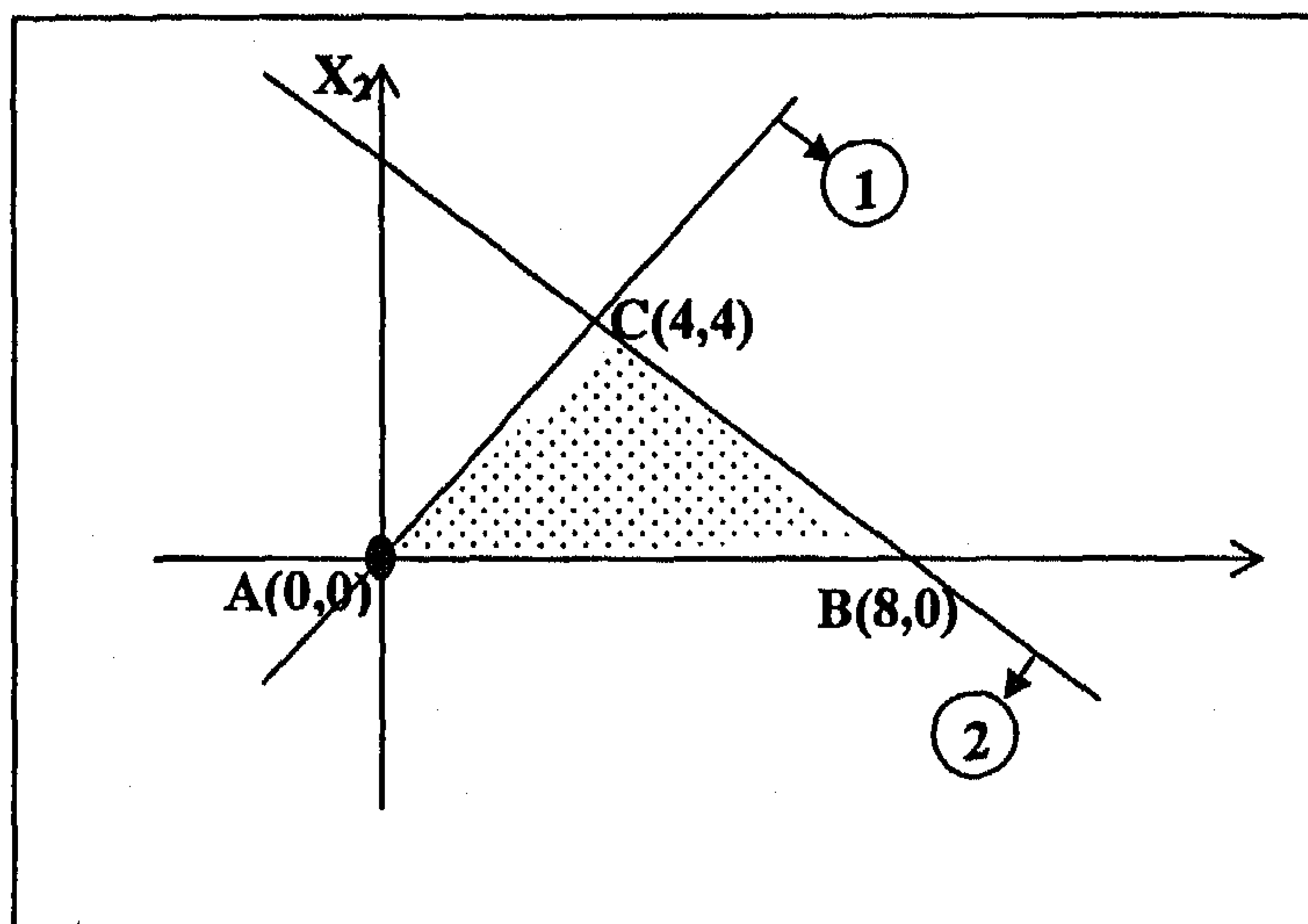
$$Max.Z = 3X_1 + X_2 - MR_1$$

$$S.T. \quad X_1 - X_2 - S_1 + R_1 = 0 \rightarrow R_1 = 0 - X_1 + X_2 + S_1$$

$$X_1 + X_2 + S_2 = 8$$

$$X_1 , X_2 , S_1 , S_2 , R_1 \geq 0$$

شكل (٣-١٣)



جدول (٣-٤٧)

المتغير الخارج

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_2	الحل
Z	1	-(3+M)	M-1	+M	0	0	0
الخارج←R_1	0	1	-1	-1	0	1	0
S_2	0	1	1	0	1	0	8

من الجدول نجد أن النقطة المبدئية أو الحل الأساسي غير الممكن $(R_1 = 0 \ , \ S_2 = 8)$ يعتبر حل متردد.

وننتقل إلى نقطة حل أساسي أخرى على النحو الموضح في الجدول (٣-٤٨). ومن الجدول يتضح أن نقطة الحل الأساسي الممكن $X_1, X_2 = 0 \ , \ S_2 = 8 \ , \ Z = 0$ يعتبر حل متردد أيضاً.

جدول (٣-٤٨)		المتغير الخارج

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	الحل
Z	1	0	-4	-3	0	3+M	0
X_1	0	1	-1	-1	0	1	0
الخارج ← S_2	0	0	2	1	1	-1	8

جدول (٣-٤٩)		المتغير الخارج

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	الحل
Z	1	0	0	-1	2	M+1	16
X_1	0	1	0	-1/2	1/2	1/2	4
الخارج ← X_2	0	0	1	1/2	1/2	-1/2	4

ومن جدول (٣-٤٩) يتضح أن نقط الحل الأساسي المتاح

$$X_1 = 4 \ , \ X_2 = 4 \ , \ Z = 16$$

وننتقل إلى نقطة حل أخر على النحو الموضح في الجدول التالي

جدول (٣-٥٠)

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	الحل
Z	1	0	2	0	3	M	24
X_1	0	1	1	0	1	0	8
S_1	0	0	2	1	1	-1	8

ومن الجدول الأخير نجد أن الحل الأمثل:

$$X_1 = 8 \ , \ X_2 = 0 \ , \ Z = 24$$

وحالة التردد في هذا المثال يعتبر تردد مؤقت حدث في الجدول الأساسي والجدول التالي له فقط.

(٣-٧) الحل باستخدام الحاسب (الحزم الجاهزة)
Computer Solution

في هذا الفصل سوف نقدم كيفية استخدام حزمة TORA لحل مشاكل البرمجة الخطية بصفة عامة (أنظر ملحق رقم E). وسوف نوضح خطوات استخدام TORA لإيجاد الحل بيانياً أو جبرياً من خلال الأمثلة التالية.

<u>مثال (٣-٢٢)</u>: أعتبر نموذج البرمجة الخطية التالي

$$Max.Z = 5X_1 + 7X_2$$

$$S.T. \quad 5X_1 - 2X_2 \geq 10 \qquad (1)$$

$$X_1 + X_2 \geq 5 \qquad (2)$$

$$-3X_1 + 6X_2 \leq 6 \qquad (3)$$

$$8X_1 + 10X_2 \leq 80 \qquad (4)$$

$$X_1 \leq 8 \qquad (5)$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

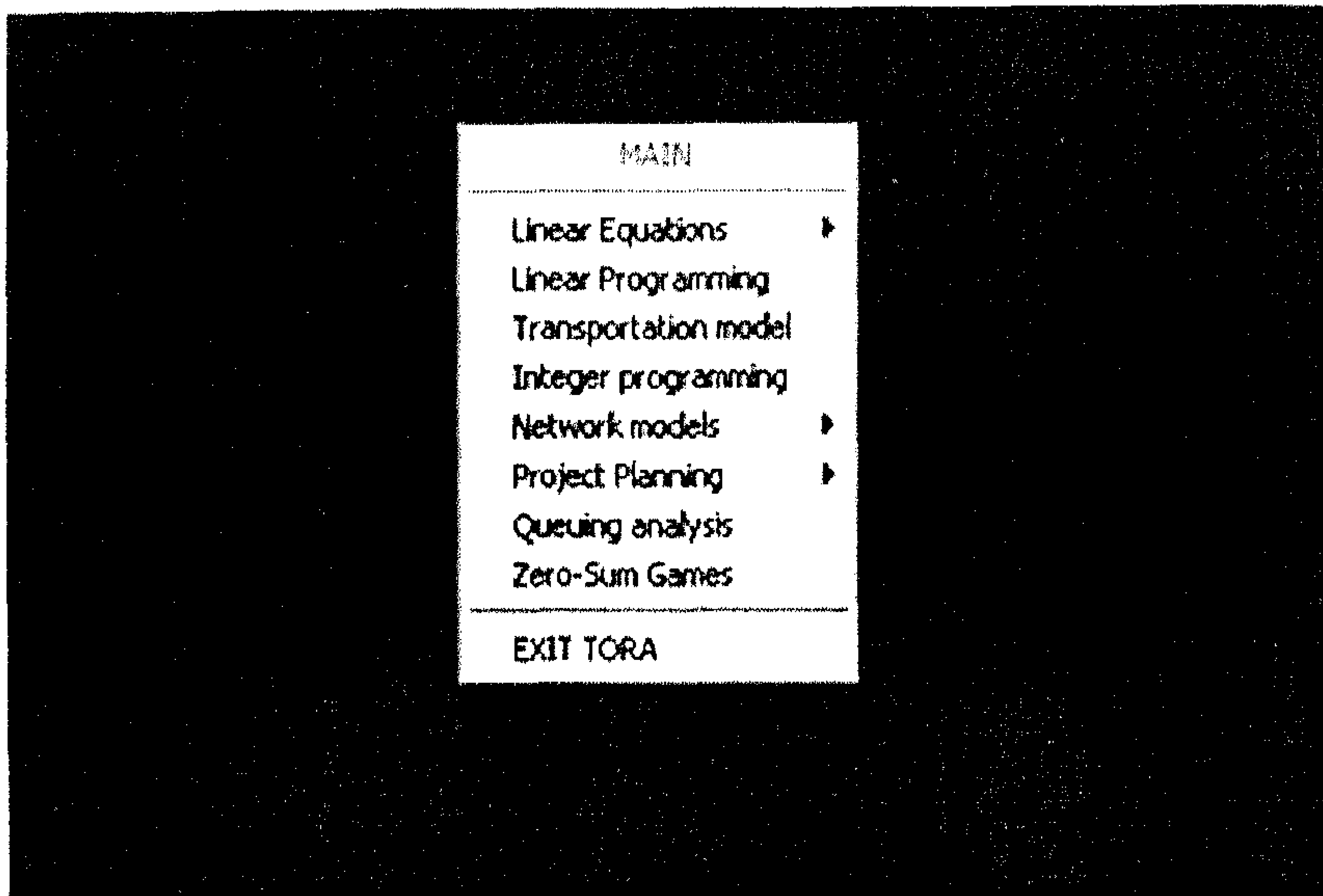
للحصول على الحل البياني باستخدام حزمة TORA نتبع الخطوات التالية:

<u>الخطوة (١)</u>: ١- يتم فتح القائمة الرئيسية Menu (أنظر ملحق E).

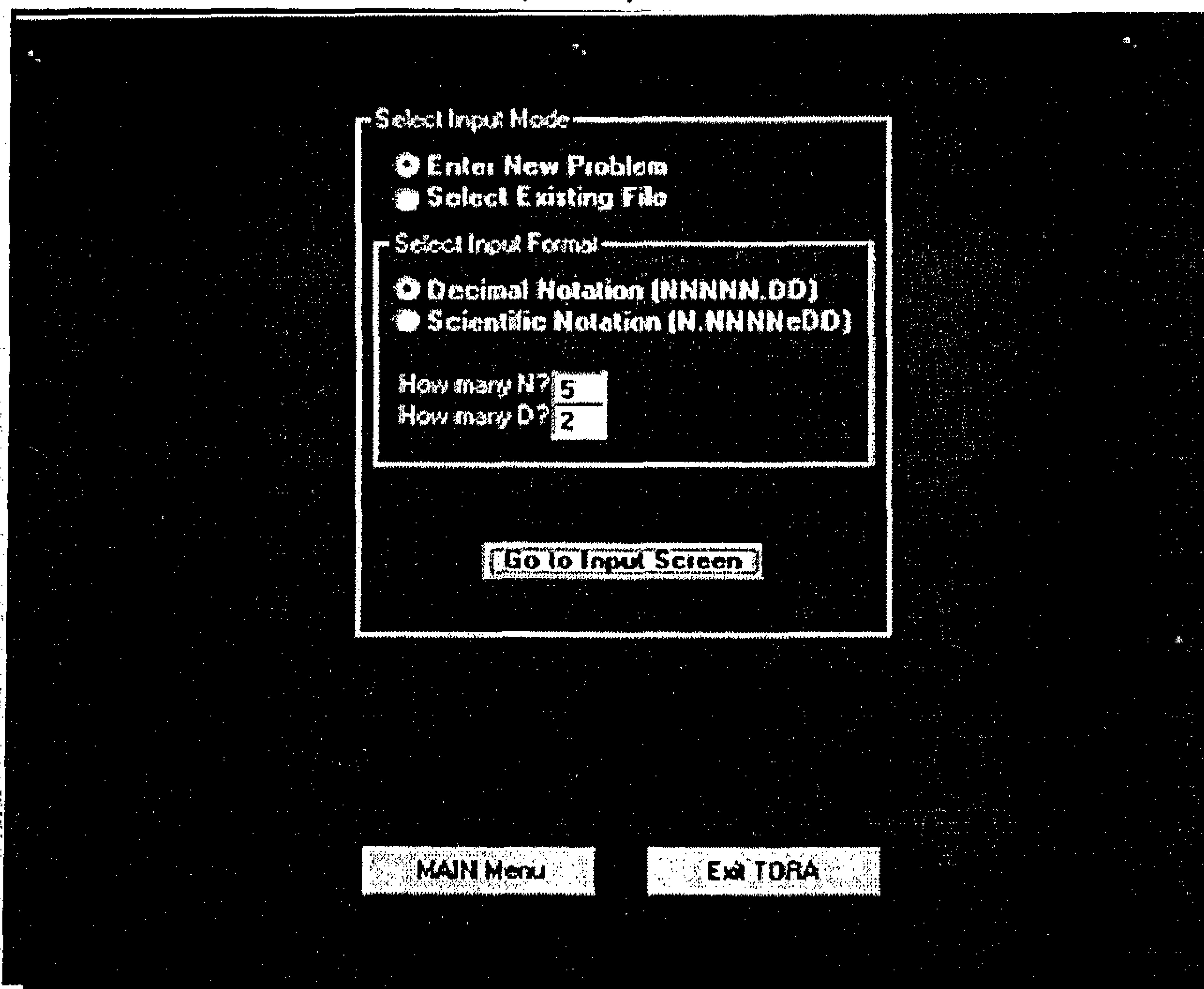
٢- من القائمة نختار Linear Programming كما هو موضح في الشكل (٣-١٤).

٣- فتظهر النافذة في شكل (٣-١٥) التالي حيث توضح كيفية تحديد هل المطلوب حل مشكلة جديدة أم مشكلة موجودة، كذلك شكل البيانات التي يتم إدخالها (صحيحة، عشرية، آسية).

شكل (٣-١٤)



شكل (٣-١٥)



٤- يتم الضغط على Go to input screen في شكل (٣-١٥). فتظهر النافذة الموضحة في الشكل التالي.

شكل (٣-١٦)

حيث يتم كتابة عنوان المشكلة وعدد المتغيرات (القرارية والمكملة والمصطنعة في حالة وجودها ووجود أكثر من متغيرين قراريين). كما هو موضح في شكل (٣-١٧). ثم الضغط على مفتاح tab أو Return من لوحة المفاتيح.

فيظهر جدول إدخال البيانات فيتم إدخال بيانات المشكلة كما هو موضح بالشكل (٣-١٨).

شكل (٣-١٧)

Problem Title: Example 3-22
Nbr. of Variables: 2
No. of Constraints: 5
Enter value then press RETURN or TAB to initialize input grid

SOLVE Menu　MAIN Menu　Exit TORA

شكل (٣-١٨)

Problem Title: example 3-2
Nbr. of Variables: 2
No. of Constraints: 5

INPUT GRID - LINEAR PROGRAMMING

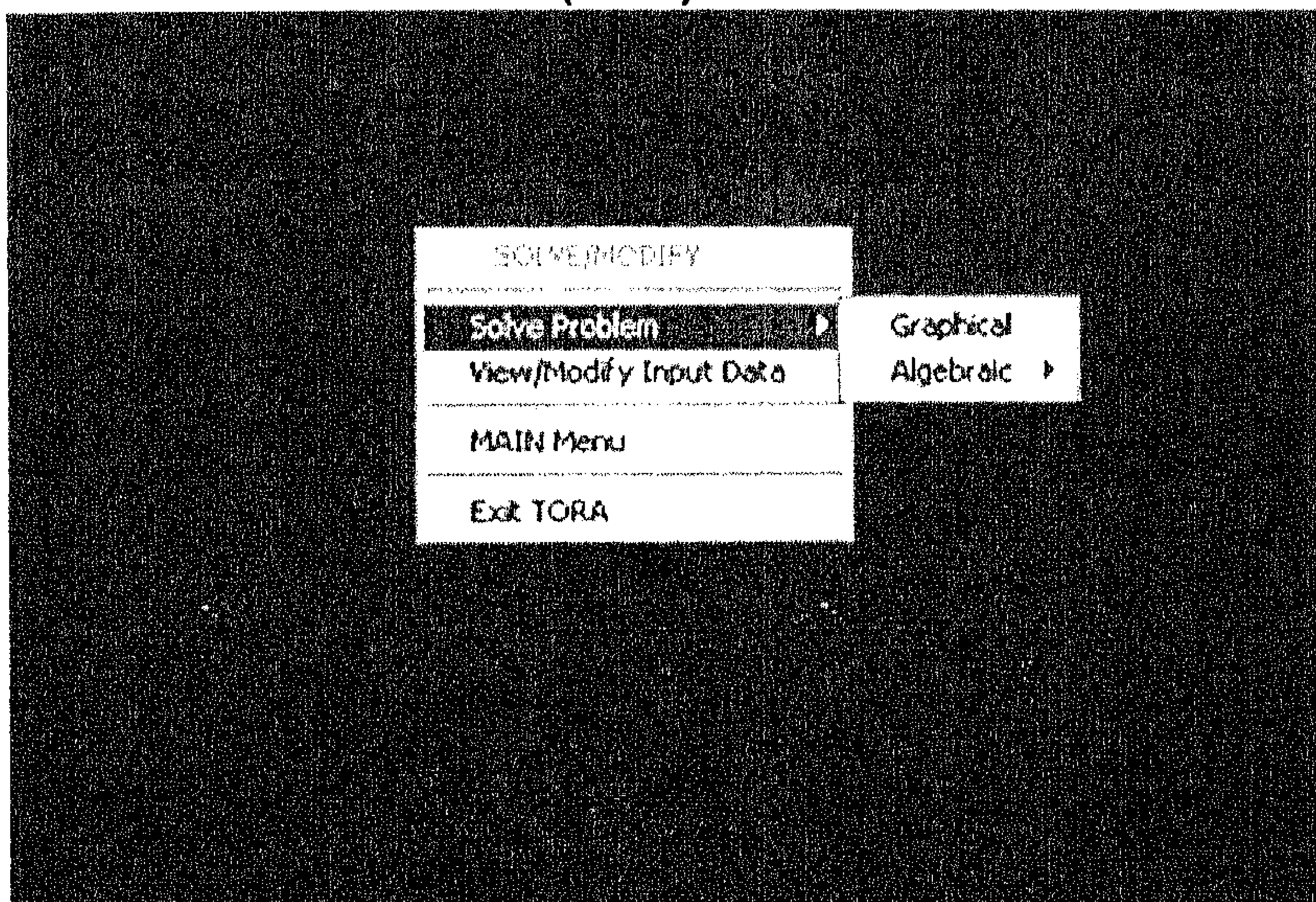
	x1	x2	Enter <, >, or =	R.H.S.
Var. Name				
Maximize	5.00	7.00		
Constr 1	5.00	-2.00	>=	10.00
Constr 2	1.00	1.00	>=	5.00
Constr 3	-3.00	6.00	<=	6.00
Constr 4	8.00	10.00	<=	80.00
Constr 5	1.00	0.00	<=	8
Lower Bound	0.00	0.00		
Upper Bound	infinity	infinity		
Unrestr'd (y/n)?	n	n		

SOLVE Menu　MAIN Menu　Exit TORA

ثم الضغط على Solve Menu في شكل (٣-١٨).

<u>الخطوة (٢):</u> ١- إذا كانت المشكلة في متغيرين قراريين فقط تظهر النافذة في الشكل التالي حيث تظهر القائمة الفرعية التي تشتمل طرق الحل بياني Graphical أو جبري Algebraic.

شكل (٣-١٩)

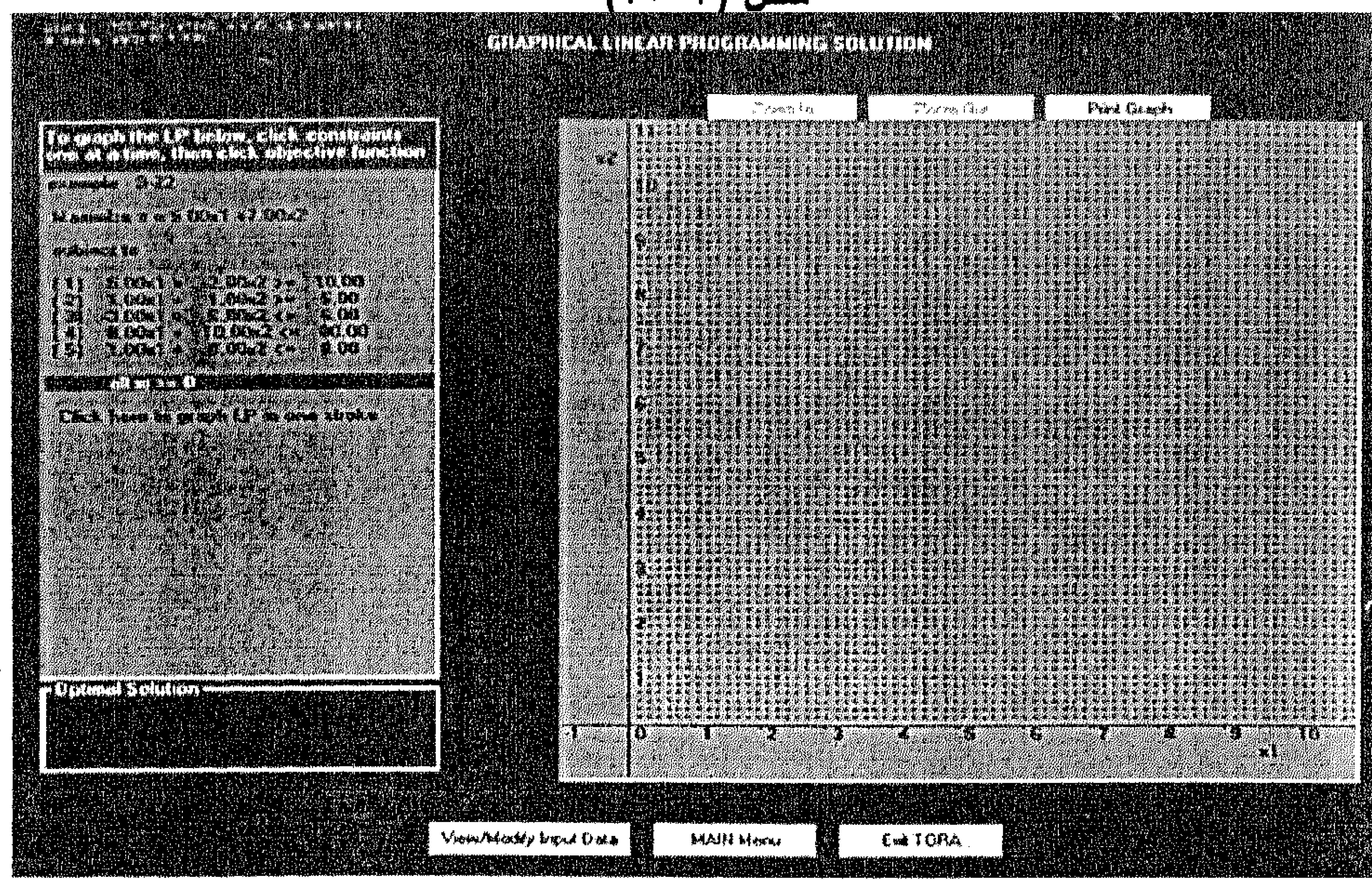


٢- بالضغط على Graphical تظهر النافذة بشكل (٣-٢٠).

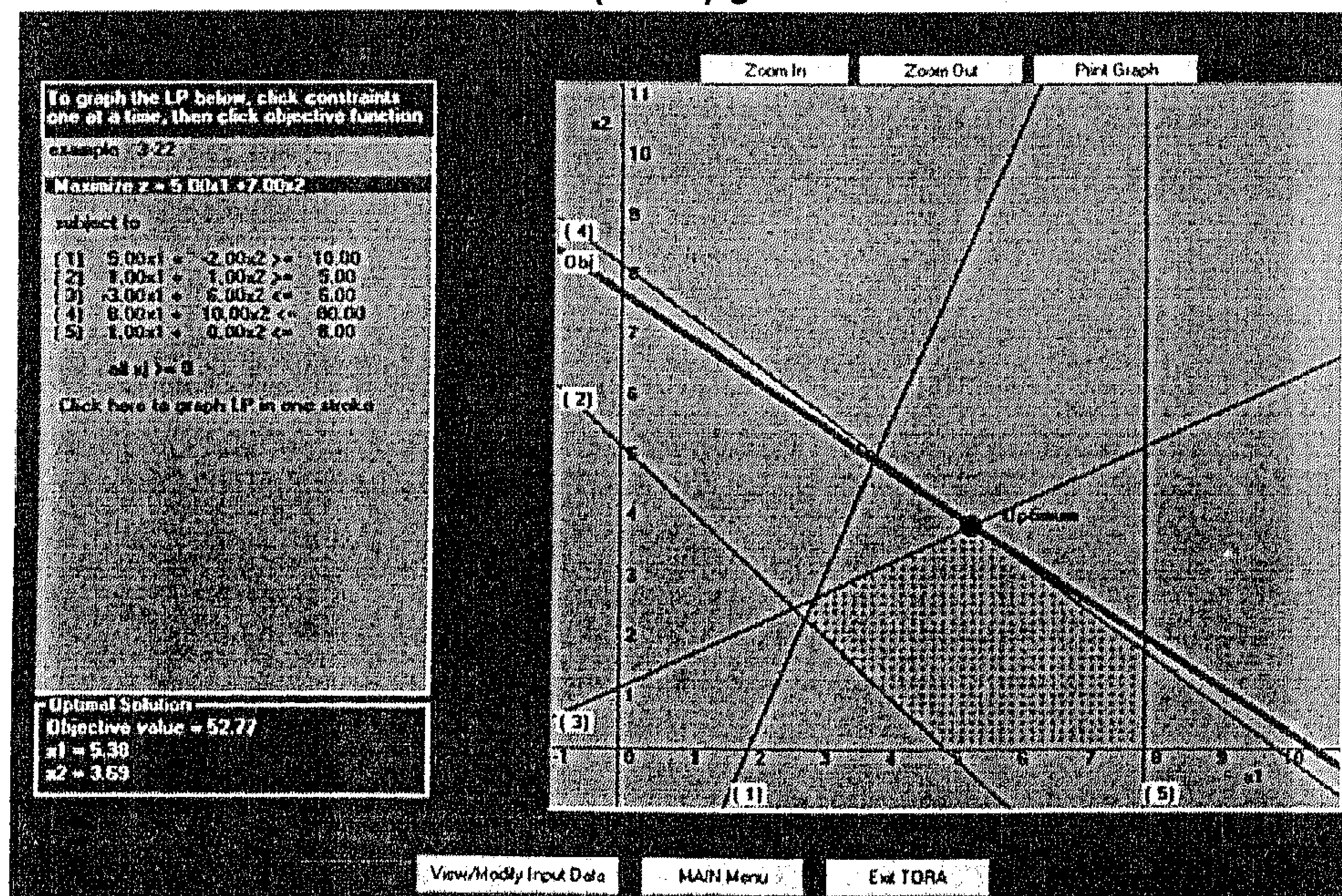
حيث يظهر في الجانب اليسار للنافذة المشكلة التي تم إدخال بياناتها كذلك في أعلى اليسار أوامر رسم القيود ودالة الهدف. فبالضغط على قيد قيد فيتم رسم منطقة الحلول الممكنة ثم بالضغط على دالة الهدف فيتم رسمها في الجانب الأيمن للنافذة كما هو موضح في شكل (٣-٢١).

٣- ثم الضغط على Solution Optimum فيظهر الحل الأمثل كما هو موضح بشكل (٣-٢١).

شكل (٣-٢٠)



شكل (٣-٢١)



حيث يتضح من شكل (٣-٢١) أن الحل الأمثل:

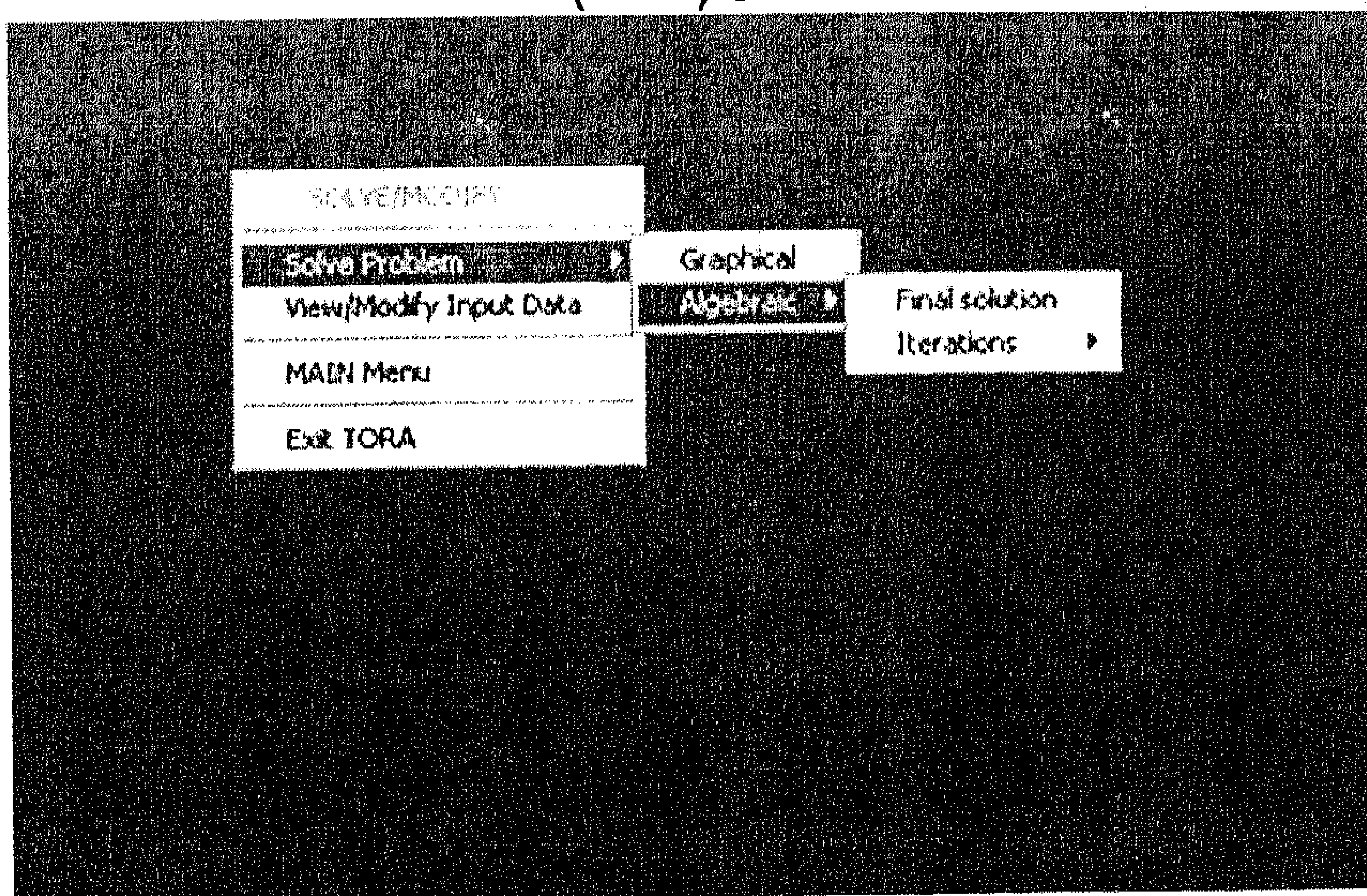
$$X_1^* = 5.38 \quad , \quad X_2^* = 3.69 \quad , \quad Z^* = 52.77$$

مثال (٣-٢٣): إذا اعتبرنا المثال السابق وكان المطلوب إيجاد الحل الجبري باستخدام حزمة TORA.

الخطوة (١): نفس الأسلوب المتبع في الخطوة (١) في المثال السابق.

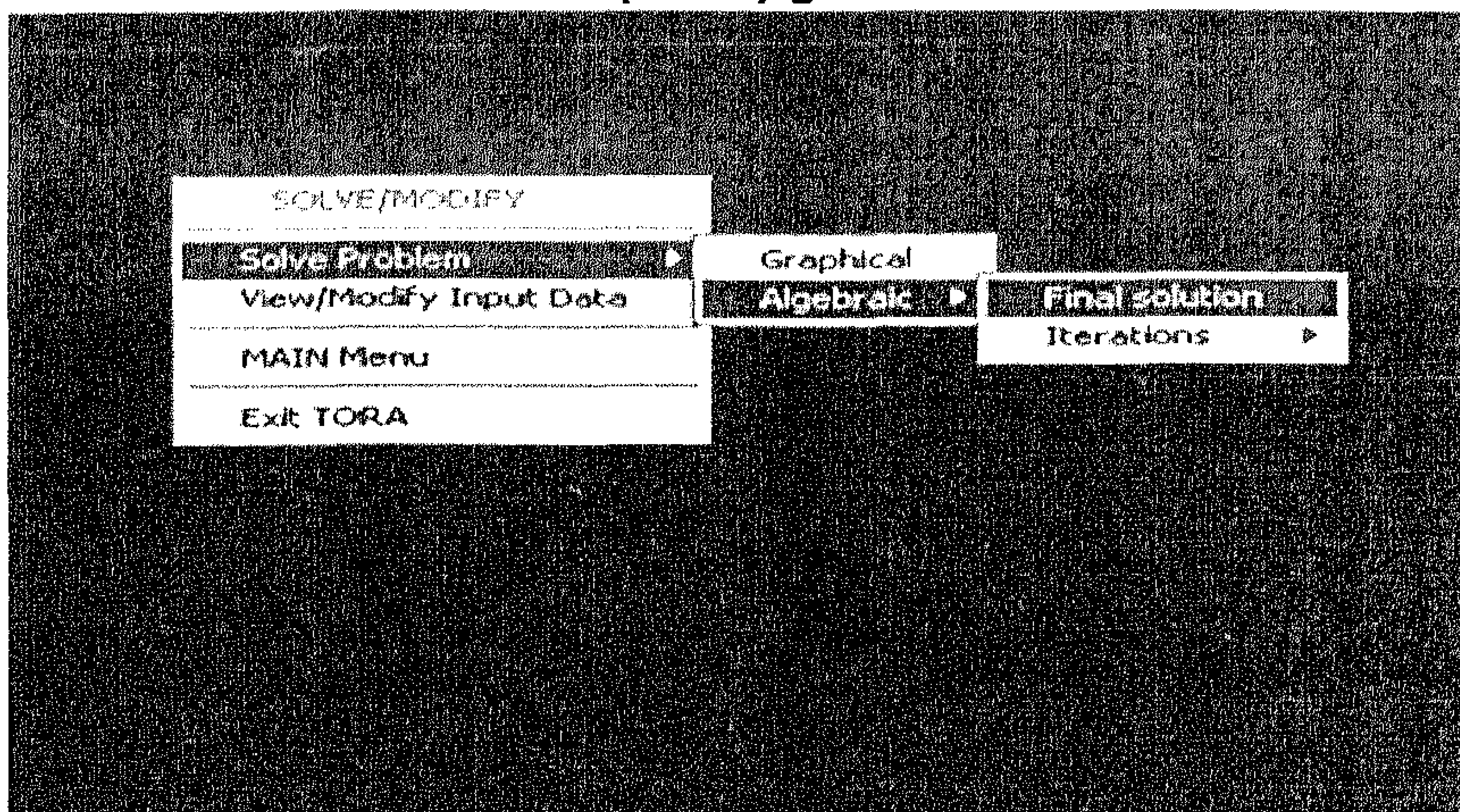
الخطوة (٢): إذا كانت المشكلة تحتوي على متغيرين تظهر النافذة في الشكل (٣-١٩) فيتم الضغط على Algebraic فتظهر القائمة الفرعية الثانية كما في الشكل التالي.

شكل (٣-٢٢)



حيث تحتوى القائمة الفرعية الثانية على الحل النهائي Final Solution كذلك المراحل المختلفة للوصول للحل النهائي Iterations كما هو موضح بالشكل التالي.

شكل (٣-٢٣)



<u>الخطوة (٣)</u>: ١- إذا تم اختيار الحل النهائي Final Solution تظهر نافذة المخرجات كما هو موضح في الشكل التالي.

شكل (٣-٢٤)

LINEAR PROGRAMMING OUTPUT SUMMARY

Title: Example 3.23
Final Iteration No.: 7
Objective Value (Max) =52.77

Next Iteration | All Iterations | Write to Printer

Variable	Value	Obj Coeff	Obj Val Contrib
x1:	5.38	5.00	26.92
x2:	3.69	7.00	25.85

Constraint	RHS	Slack-/Surplus+
1 (>)	10.00	9.54+
2 (>)	5.00	4.08+
3 (<)	6.00	0.00
4 (<)	80.00	0.00
5 (<)	8.00	2.62-

Sensitivity Analysis

Variable	Current Obj Coeff	Min Obj Coeff	Max Obj Coeff	Reduced Cost
x1:	5.00	3.50	5.60	0.00
x2:	7.00	6.25	Infinity	0.00

Constraint	Current RHS	Min RHS	Max RHS	Dual Price
1 (>)	10.00	-infinity	19.54	0.00

من الشكل يتضح الآتي:

أ) يوجد أسم المشكلة في Title: example 3-23.

ب) يوجد عدد التكرارات للوصول إلى الحل الأمثل وفي هذا المثال تساوي 7.

ج) قيمة دالة الهدف Z حيث $Z^* = 52.77$ في الحل الأمثل.

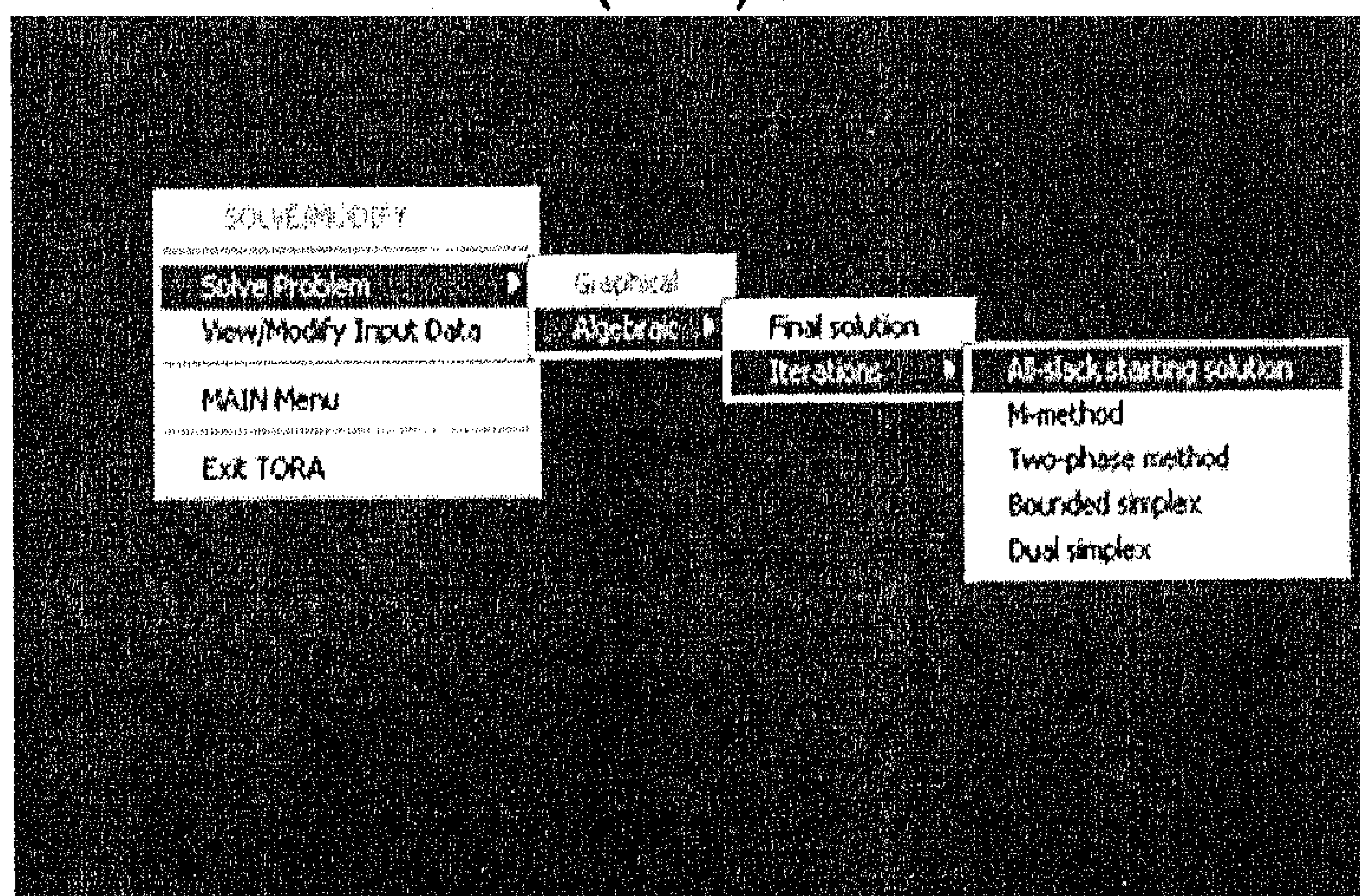
د) في عمود المتغيرات Variables – توجد المتغيرات الأساسية في الحل النهائي الأمثل كذلك في العمود المناظر لها توجد قيمة كل متغير فنجد أن:

$$X_1^* = 5.38 \quad , \quad X_2^* = 3.69$$

هـ) في عمود القيود Constraints نجد أرقام القيود في المشكلة ويناظر كل قيد قيمة الطرف الأيمن المناظر للقيد في RHS كذلك يناظره في عمود Slack-Surplus+ قيمة المتغير المكمل المناظر للقيد عند تحويله إلى متساوية.

٢- أما إذا تم اختيار المراحل المختلفة للحل Iterations كما في شكل (٣-٢٣) فتظهر النافذة فيتم فتح النافذة الفرعية كما هو موضح في الشكل التالي.

شكل (٣-٢٥)



حيث تحتوي القائمة الفرعية على الطرق المختلفة التي يمكن استخدامها في حـل المشكلة جبرياً

All-Slack Starting Solution
M-Method
Tow-Phase Method
Bounded Simplex
Dual Simplex

٣- فإذا اخترنا طريقة المرحلتين **Tow-Phase Method** تظهر المراحل المتتالية للحل حيث يمثل الجدول الأخير الحل الأمثل.

مثال (٣-٢٤): أعتبر نموذج البرمجة الخطية التالي

$$\text{Max.}Z = 58X_1 + 43X_2 + 25X_3 + 17X_4 + 28X_5$$

$$\text{S.T.} \quad 25X_1 + 15X_2 + 10X_3 + 5X_4 + 1X_5 \le 50{,}000$$

$$28X_1 + 24X_2 + 18X_3 + 12X_4 + 5X_5 \le 10{,}000$$

$$52X_1 + 48X_2 + 40X_3 + 60X_4 + 75X_5 \le 25{,}000$$

$$1.5X_1 + 1.25X_2 + 1X_3 + 0.75X_4 + 1.5X_5 \le 2{,}000$$

$$0X_1 + 0X_2 + 1X_3 + 0X_4 + 0X_5 \ge 200$$

$$0X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 1X_4 + 0X_5 \ge 100$$

$$2X_1 - 1X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 \le 0$$

$$-0.5X_1 - 0.5X_2 - 0.5X_3 - 0.5X_4 + 1X_5 \le 0$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \ge 0$$

باستخدام حزمة TORA أوجد الحل الأمثل.

الحل:

١- بنفس الخطوات في الأمثلة السابقة ندخل بيانات المشكلة كما هو موضح في الشكل التالي.

شكل (٣-٢٧)

Problem Title: example 3-24

Nbr. of Variables: 5

No. of Constraints: 8

Editing Grid:
>>Click Maximize(Minimize) cell to change it to Minimize(Maximize)
>>To DELETE, INSERT, COPY, or PASTE a column(row), click heading cell of target column(row), then invoke pull down EditGrid menu
>>For INSERT mode, a single(double) click of target row/column will place new row/column after(before) target row/column.

INPUT GRID - LINEAR PROGRAMMING

	x1	x2	x3	x4	x5	Enter <,>, or =	R.H.S.
Var. Name							
Maximize	58.00	43.00	25.00	17.00	28.00		
Constr 1	25.00	15.00	10.00	5.00	1.00	<=	50000.00
Constr 2	28.00	24.00	18.00	12.00	5.00	<=	10000.00
Constr 3	52.00	48.00	40.00	60.00	75.00	<=	25000.00
Constr 4	1.50	1.25	1.00	0.75	1.50	<=	2000.00
Constr 5	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	>=	200.00
Constr 6	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	>=	100.00
Constr 7	2.00	-1.00	0.00	0.00	0.00	<=	0.00
Constr 8	-0.50	-0.50	-0.50	-0.50	1.00	<=	0
Lower Bound	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		
Upper Bound	infinity	infinity	infinity	infinity	infinity		
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n	n	n		

SOLVE Menu | MAIN Menu | Exit TORA

وباختيار الحل النهائي – نحصل على الحل الأمثل كما هو موضح في الشكل التالي.

شكل (٣-٢٨)

LINEAR PROGRAMMING OUTPUT SUMMARY

Title: example 3 24
Final Iteration No.: 8
Objective Value (Max) =16800.65

Next Iteration | All Iterations | Write to Printer

Variable	Value	Obj Coeff	Obj Val Contrib
x1:	67.54	58.00	3917.34
x2:	135.08	43.00	5808.47
x3:	200.00	25.00	5000.00
x4:	100.00	17.00	1700.00
x5:	13.39	28.00	374.84

Constraint	RHS	Slack-/Surplus+
1(<)	50000.00	43771.90-
2(<)	10000.00	0.00
3(<)	25000.00	0.00
4(<)	2000.00	1434.76-
5(>)	200.00	0.00
6(>)	100.00	0.00
7(<)	0.00	0.00
8(<)	0.00	237.92-

Sensitivity Analysis

Variable	Current Obj Coeff	Min Obj Coeff	Max Obj Coeff	Reduced Cost
x1:	58.00	48.99	339.60	0.00
x2:	43.00	20.34	50.63	0.00
x3:	25.00	-infinity	35.51	0.00
x4:	17.00	-infinity	33.14	0.00
x5:	28.00	9.47	72.97	0.00

Constraint	Current RHS	Min RHS	Max RHS	Dual Price

View/Modify Input Data | MAIN Menu | Exit TORA

من الشكل السابق نجد أن الحل الأمثل تم الحصول عليه بعد 8 تكرارات:

$$Z^* = 16800.65 \quad , \quad X_1^* = 67.54 \quad , \quad X_2^* = 135.08 \quad ,$$

$$X_3^* = 200 \quad , \quad X_4^* = 100 \quad , \quad X_5^* = 13.39$$

(٣-٨) تمرينات Exercises

(٣-١): حل المشاكل التالية بيانياً وجبرياً باستخدام طريقة السمبلكس:

(1) $\text{Max.} Z = 50X_1 + 30X_2$

S.T.
$$5X_1 + 8X_2 \le 2000$$
$$X_1 \le 175$$
$$X_2 \le 225$$
$$7X_1 + 4X_2 \le 1400$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

(2) $\text{Min.} Z = 12X_1 + 9X_2$

S.T.
$$X_1 + 3X_2 \ge 9$$
$$2X_1 + 3X_2 \ge 12$$
$$X_1 + X_2 \ge 5$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

(3) $\text{Max.} Z = 100X_1 + 80X_2$

S.T.
$$2X_1 + X_2 \le 20$$
$$X_1 + 3X_2 \le 30$$
$$X_1 - 2X_2 \ge -15$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

(4) $\text{Min.} Z = 3X_1 - 5X_2$

S.T.
$$4X_1 + 3X_2 \ge 12$$
$$X_1 + 10X_2 \le 20$$
$$10X_1 - X_2 \le 100$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

(٣-٢): باستخدام أسلوب M، حل النماذج التالية:

(1) $\text{Max.} P = 2X + Y + 3Z$

S.T.
$$2X + 3Y + 4Z = 12$$
$$X + Y + 2Z \le 5$$
$$X, Y, Z \ge 0$$

(2) $\text{Min.} Z = 5X + 2Y + 10Z$

S.T.
$$X - Z \le 10$$
$$Y + Z \ge 10$$
$$X, Y, Z \ge 0$$

(3) $Max.Z = X + 2Y + 3Z$

S.T. $7X + Z \le 6$

$X + 2Y \le 20$

$3Y + 4Z \le 0$

$X, Y, Z \ge 0$

(4) $Min.T = X - 3Y + 2Z$

S.T. $3X - Y + 3Z \le 7$

$-2X + 4Y \le 12$

$-4X + 3Y + 8Z \le 10$

$X, Y, Z \ge 0$

(٣-٣): باستخدام أسلوب المرحلتين، أوجد حل النماذج التالية:

(1) $Max.Z = 2X_1 + 4X_2 + 3X_3$

S.T. $2X_1 + 2X_2 + X_3 \le 60$

$X_1 + 2X_2 + 2X_3 \le 80$

$2X_1 + X_2 + 2X_3 \le 40$

$X_1, X_2, X_3 \ge 0$

(2) $Min.Z = 4X + 8Y + 3Z$

S.T. $3X + 2Y + Z \le 3$

$2X + Y + 2Z \ge 3$

$X, Y, Z \ge 0$

(3) $Max.Z = 12X + 24Y + 9Z$

S.T. $3X + 2Y + Z \le 3$

$2X + Y + 2Z \ge 3$

$X, Y, Z \ge 0$

(4) $Min.Z = 25X + 10Y + 50Z$

S.T. $X - Z \le 10$

$Y + Z \ge 10$

$X, Y, Z \ge 0$

(٣-٤): باستخدام حزمة TORA حل المشاكل التالية:

$$(1)\ Max.Z = 6X_1 + 5X_2 + 8X_3$$
$$S.T.\quad 2X_1 + 4X_2 + 3X_3 \le 100$$
$$7X_1 + 2X_2 - X_3 \ge 10$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

$$(2)\ Max.Z = 4X_1 + 6X_2 + 8X_3 + X_4$$
$$S.T.\quad X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \le 1$$
$$X_1 + X_2 + 2X_3 = 2$$
$$3X_1 + 2X_2 + X_3 - X_4 \ge 4$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0$$

$$(3)\ Min.Z = 85X_1 + 65X_2 + 10X_3$$
$$S.T.\quad 20X_1 + 32X_2 = 25$$
$$X_1 + X_2 + X_3 = 10$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

(٣-٥): اعتبر القيود الخطية التالية:

$$X_1 + 7X_2 + 3X_3 + 7X_4 \le 46$$
$$6X_1 - 2X_2 + 2X_3 + 4X_4 \le 16$$
$$4X_1 + 6X_2 - 2X_3 + 2X_4 \le 20$$

باستخدام طريقة السمبلكس أوجد الحل الأمثل في كل حالة من حالات دالة الهدف التالية مع القيود أعلاه.

$$1 - Max.Z = 6\,X_1 + 3\,X_2 - 9\,X_3 + 15\,X_4$$

$$2 - Max.Z = -4\,X_1 + 12\,X_2 + 6\,X_3 - 4\,X_4$$

$$3 - Min.Z = 10\,X_1 - 8\,X_2 + 12\,X_3 + 16\,X_4$$

$$4 - Min.Z = 9\,X_1 + 18\,X_2 - 6\,X_3 + 12\,X_4$$

(٣-٦): أعتبر نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\begin{aligned} Max.Z &= 9\,X_1 + 3\,X_2 + 6\,X_3 \\ S.T.\quad & 12\,X_1 + 3\,X_2 + 6\,X_3 + 3\,X_4 = 9 \\ & 8\,X_1 + X_2 - 4\,X_3 + X_5 = 10 \\ & 3\,X_1 - X_6 = 0 \\ & X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \ge 0 \end{aligned}$$

حل النموذج باعتبار أن المتغيرات X_4 , X_5 , X_6 كمتغيرات أساسية في الحل الأساسي الممكن Basic Feasible Solution.

(٣-٧): حل النموذج التالي باستخدام المتغيرات X_3 , X_4 كمتغيرات أساسية في الحل المبدئي الأساسي المتاح Starting Basic Feasible Solution:

$$\begin{aligned} Min.Z &= 12\,X_1 + 8\,X_2 + 12\,X_3 \\ S.T.\quad & X_1 + 4\,X_2 + X_3 \ge 7 \\ & 2X_1 + X_2 + X_4 = 2 \\ & X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0 \end{aligned}$$

الباب الرابع
مشكلة النقل
The Transportation Problem

(٤–١) تعريف المشكلة — The Problem's Definition

(٤–٢) نموذج النقل المتوازن

Balanced Transportation Model

(٤–٣) نموذج النقل غير المتوازن

Unbalanced Transportation Model

(٤–٤) الطرق المختلفة لإيجاد حل مبدئي ممكن

Different Methods to Find Initial Feasible Solution

(٤–٥) الطرق المختلفة لإيجاد الحل الأمثل

Different Methods to Find the Optimum Solution

(٤–٦) الحل باستخدام الحاسب (الحزم الجاهزة)

Computer Solution

(٤–٧) تمرينات — Exercises

(٤-١) تعريف المشكلة The Problems Definition

تعتبر مشكلة النقل من أهم المشاكل التي تناولتها أساليب بحوث العمليات بكفاءة. فتكلفة نقل سلعة معينة (أو خدمة ما) من مراكز إنتاجها (أو مراكز عرضها أو تصديرها) Sources إلى مراكز استهلاكها (أو مراكز الطلب أو الاستيراد) Destinations جزء هام في التكلفة الكلية للسلعة وبالتالي من سعر بيع الوحدة أيضاً. وتحديد أقل تكلفة للنقل يعتبر هدف هام لمتخذ القرار في المشاكل الاقتصادية والتجارية لتأثيرها على التكلفة الكلية للسلعة.

وتتلخص مشكلة النقل في وجود عدد (m) من مراكز الإنتاج تقوم بإنتاج (أو عرض) نفس المنتج، ووجود عدد (n) من مراكز الاستهلاك (أو مراكز الطلب) ترغب في سد احتياجاتها من مراكز الإنتاج المختلفة بحيث يكون إجمالي تكاليف النقل من جميع مراكز الإنتاج إلى جميع مراكز الاستهلاك لهذه السلعة (أو الخدمة) أقل ما يمكن.

فإذا فرضنا أن الكميات المتاحة في مركز الإنتاج i تساوي S_i بحيث $i = 1,2,...,m$ كذلك إذا أشرنا إلى الكميات المطلوبة لمركز الاستهلاك j تساوي D_j بحيث $j = 1,2,...,n$. كذلك إذا أشرنا لتكلفة نقل الوحدة الواحدة من السلعة من مركز الإنتاج i إلى مركز الاستهلاك j بالرمز C_{ij} كما هو موضح بالجدول التالي:

فإذا فرضنا أن X_{ij} تشير إلى الكمية المنقولة (عدد الوحدات) من مركز الإنتاج (i) إلى مركز الاستهلاك (j)، $X_{ij} \geq 0$ ، بحيث $j = 1,2,...,n$ ، $i = 1,2,...,m$ كما هو موضح بشكل (٤-١).

جدول (٤-١)

مركز الاستهلاك / مركز الإنتاج	1	2	......	j	......	n	الكميات المتاحة
1	C_{11}	C_{12}	......	C_{1j}	......	C_{1m}	S_1
2	C_{21}	C_{22}	......	C_{2j}	......	C_{2m}	S_2
3	:	:	......	:	......	:	:
:	:	:	......	:	......	:	:
i	C_{i1}	C_{i2}	......	C_{ij}	......	C_{im}	S_i
:	:	:	......	:	......	:	:
m	C_{m1}	C_{m2}	......	C_{mj}	......	C_{mm}	S_m
الكميات المطلوبة	D_1	D_2	......	D_j	......		$\sum S_i$ / $\sum D_j$

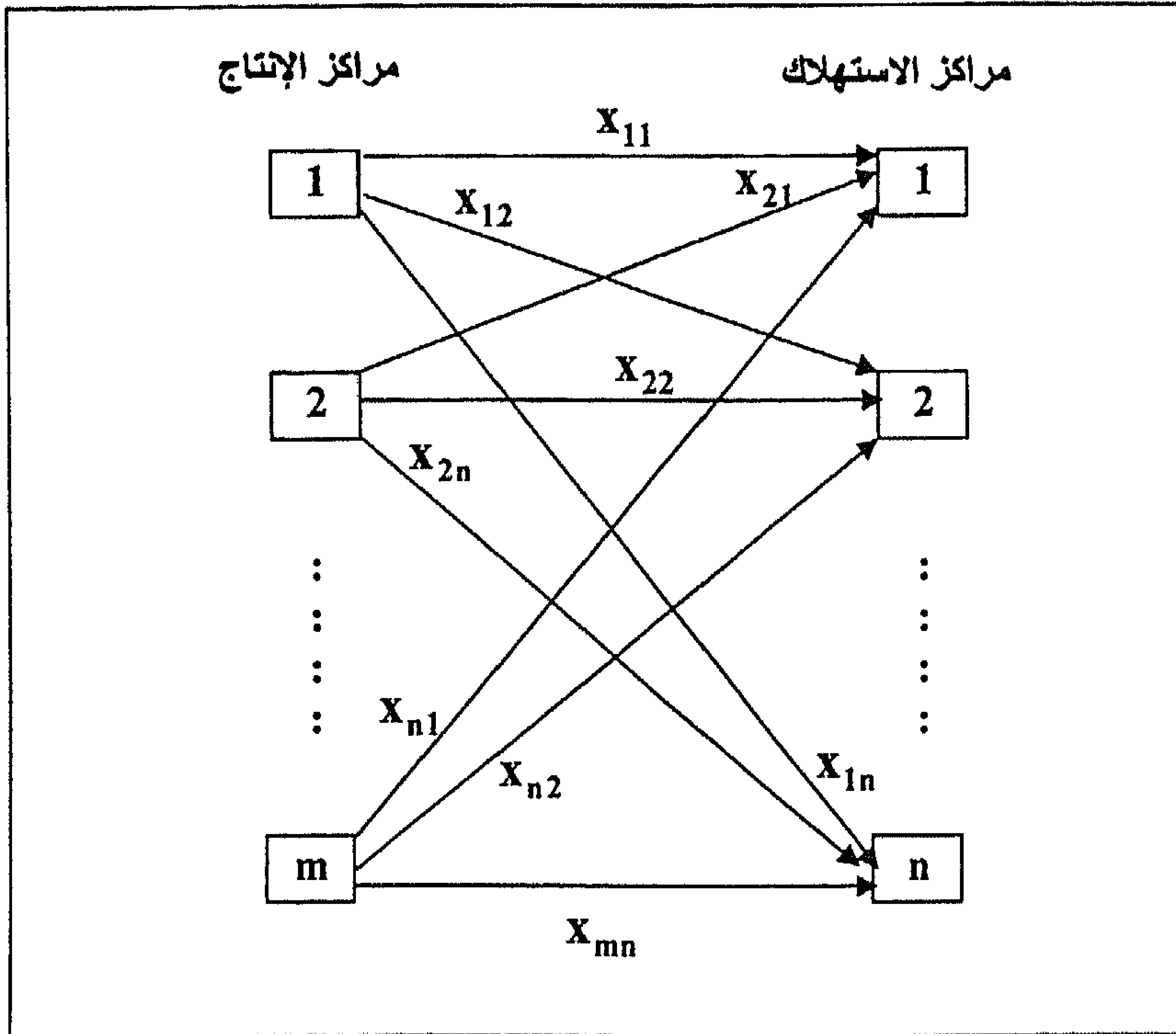
ويمكن صياغة مشكلة النقل كنموذج برمجة خطية كما سبق توضيح ذلك في الباب الثاني. وفي الفصلين التاليين سوف نقدم صياغة مشكلة النقل في صورة نموذج البرمجة الخطية في حالتين:

الحالة الأولي: عندما يكون إجمالي الكميات في مراكز الإنتاج $(\sum_{i=1}^{m} S_i)$ مساوي لإجمالي الكميات المستهلكة (أو المطلوبة) في جميع مراكز الاستهلاك $(\sum_{j=1}^{n} D_j)$ أو بعبارة أخرى عندما يكون:

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j \qquad (4.1)$$

ويسمى نموذج النقل في هذه الحالة بنموذج النقل المتوازن Balanced Transportation Model.

شكل (٤-١)



<u>الحالة الثانية</u>: عندما يكون إجمالي الكميات المنتجة لا يساوى إجمالي الكميات المطلوبة، أو بعبارة أخرى عندما:

$$\sum_{i=1}^{m} S_i > \sum_{j=1}^{n} D_j \qquad (4.2)$$

أي في حالة عندما تكون الكميات المنتجة أكبر من الكميات المستهلكة أو المطلوبة أو عندما:

$$\sum_{i=1}^{m} S_i < \sum_{j=1}^{n} D_j \qquad (4.3)$$

أي في حالة عندما تكون الكميات المنتجة أقل من الكميات المستهلكة أو المطلوبة. في هذه الحالة عندما لا تساوي الكميات المنتجة الكميات المطلوبة في هذه الحالة يمكن صياغة المشكلة كنموذج نقل غير متوازن Unbalanced Transportation Model ويمكن تحويله إلى نموذج متوازن كما سوف نوضح في الفصل (٤-٣).

(٤-٢) نموذج النقل المتوازن

Balanced Transportation Model

إذا اعتبرنا أن الكميات المنتجة تساوي الكميات المستهلكة أو بعبارة أخرى عندما:

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j$$

فإنه يمكن صياغة مشكلة النقل كنموذج برمجة خطية على النحو التالي:

أوجد قيم X_{ij} بحيث $j = 1,2,...,n$ ، $i = 1,2,...,m$ التي تجعل:

$$Min.Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + ... + C_{mn}X_{mn}$$

S.T.

$$\left.\begin{array}{l} X_{11} + X_{12} + X_{13} + ... + X_{1n} = S_1 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + ... + X_{2n} = S_2 \\ : \\ : \\ X_{m1} + X_{m2} + X_{m3} + ... + X_{mn} = S_m \end{array}\right\}$$

القيود المتعلقة بالكميات المتاحة في مراكز الإنتاج

$$\left.\begin{array}{l} X_{11} + X_{21} + X_{31} + ... + X_{m1} = D_1 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} + ... + X_{m2} = D_2 \\ : \\ : \\ X_{1n} + X_{2n} + X_{3n} + ... + X_{mn} = D_n \end{array}\right\}$$

القيود المتعلقة بالكميات المطلوبة لمراكز الاستهلاك

$$X_{ij} \geq 0 \quad ; \quad i = 1,2,....,m \; , \; j = 1,2,....,n$$

ويمكن إعادة كتابة النموذج السابق بطريقة مختصرة على النحو التالي:

$$\text{Min.}Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij} \qquad (4.4)$$

$$\text{S.T.} \quad \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = S_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots,m \qquad (4.5)$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = D_j \quad , \quad j = 1,2,\ldots,n \qquad (4.6)$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad , \quad i = 1,2,\ldots,m \ , \ j = 1,2,\ldots,n \qquad (4.7)$$

خصائص النموذج

١- النموذج (4.7)-(4.4) يمثل نموذج برمجة خطية يمكن إيجاد الحل الأمثل له باستخدام طريقة السمبلكس التي سبق تقديمها في الباب الثالث.

٢- عدد القيود الهيكلية في النموذج تساوي (m+n-1) من القيود المستقلة حيث يوجد عدد (m) قيد متعلق بالكميات المتاحة، وعدد (n) من القيود المتعلقة بالكميات المطلوبة. ولكن نظراً لوجود قيد واحد يمثل التوازن:

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j$$

بالتالي يصبح عدد القيود المستقلة يساوي (m+n-1).

٣- قيم المتغيرات القرارية X_{ij} تمثل قيم صحيحة وغير سالبة.

٤- قيمة معامل المتغير القرارى X_{ij}، لجميع قيم $j = 1,2,\ldots,n$، $i = 1,2,\ldots,m$ في جميع القيود الهيكلية تساوي الواحد الصحيح (1).

القيود الهيكلية في (4.6) , (4.5) في شكل متساويات فإن الحل باستخدام طريقة السمبلكس يتطلب إضافة المتغيرات المصطنعة وحل المشكلة باستخدام أسلوب M أو أسلوب المرحلتين.

ولكن نظراً لوجود الخاصيتين (٣) ، (٤) في نموذج النقل فإنه تم اشتقاق عديد من الخوارزميات الخاصة لحل نموذج النقل وجميع هذه الخوارزميات تعتمد على طريقة السمبلكس لإيجاد الحل الأمثل، ولكن هذه الخوارزميات تؤدي إلى حل نموذج النقل في وقت أسرع من الوقت باستخدام الخوارزميات لطريقة السمبلكس للنموذج الخطي في شكله العام المقدمة في الباب الثالث.

وتعتمد طرق (أو خوارزميات) حل نموذج النقل على إيجاد نقطة حل مبدئية ممكنة (أي إيجاد نقطة في فئة الحلول الممكنة). وتوجد طرق مختلفة لإيجاد نقطة حل مبدئية ممكنة مثل:

١- طريقة الركن الشمالي الغربي North West Corner Method

٢- طريقة أقل تكلفة Least Cost Method

٣- طريقة فوجل التقريبية Vogal's Approximation Method(VAM)

وبعد تحديد نقطة حل مبدئية ممكنة يتم استخدام أحد طرق (أو خوارزميات) إيجاد الحل الأمثل لنموذج النقل، ويوجد عديد من الطرق لإيجاد الحل الأمثل مثل:

١- طريقة الحلقات المغلقة Stopping Stone Method

٢- طريقة التوزيع المعدل Modified Distribution Method

وفي الفصلين (٤-٤) ، (٤-٥) سوف نتناول بعض طرق إيجاد الحل المبدئي كذلك بعض طرق الحل الأمثل لنموذج النقل.

(٤-٣) نموذج النقل غير المتوازن

Unbalanced Transportation Model

وكما ذكرنا في الفصل الأول من هذا الباب، أنه عندما:

$$\sum_{i=1}^{m} S_i > \sum_{j=1}^{n} D_j \quad \text{أو} \quad \sum_{i=1}^{m} S_i < \sum_{j=1}^{n} D_j$$

ففي هذه الحالة يكون نموذج النقل التالي:

$$\text{Min.}Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}$$

$$\text{S.T.} \quad \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = S_i \quad , \quad i = 1,2,....,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = D_j \quad , \quad j = 1,2,....,n$$

$$X_{ij} \geq 0$$

نموذج غير متوازن. ويمكن تحويل النموذج غير المتوازن إلى نموذج متوازن على النحو التالي:

١- إذا كانت الكميات المنتجة أكبر من الكميات المطلوبة، أي عندما:

$$\sum_{i=1}^{m} S_i > \sum_{j=1}^{n} D_j$$

فإن هذه الزيادة في الإنتاج عن الاستهلاك تساوي $\left(\sum_{i=1}^{m} S_i - \sum_{j=1}^{n} D_j\right)$ تمثل زيادة في الإنتاج عن الطلب.

ويمكن اعتبار هذا المقدار في الزيادة مخزون. ويمكن اعتبار المخزن في هذه الحالة مركز استهلاك إضافي رقم (n+1) (مركز وهمي) تكون تكلفة النقل من أي

مركز إنتاج إلى هذا المركز الاستهلاكي تساوي صفر، ويتم تحويل القيد السابق على النحو التالي:

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n+1} D_j \qquad (4.8)$$

حيث:

$$D_{n+1} = \left[\sum_{i=1}^{m} S_i - \sum_{j=1}^{n} D_j\right] \qquad (4.9)$$

كذلك تعتبر التكلفة من أي مركز إنتاج إلى مركز الاستهلاك الوهمي رقم (n+1) تساوي صفر، أو بعبارة أخرى:

$$C_{i(n+1)} = 0 \quad , \qquad i = 1,2,\ldots,m \qquad (4.10)$$

٢- إذا كانت الكميات المطلوبة أكبر من الكميات المنتجة، أي عندما:

$$\sum_{i=1}^{m} S_i < \sum_{j=1}^{n} D_j$$

فإن مقدار الزيادة في الاستهلاك عن الإنتاج تساوي $\left(\sum_{j=1}^{n} D_j - \sum_{i=1}^{m} S_i\right)$ وفي هذه الحالة يمكن افتراض وجود مركز إنتاج وهمي رقم (m+1) بحيث:

$$S_{(m+1)} = \left[\sum_{j=1}^{n} D_j - \sum_{i=1}^{m} S_i\right] \qquad (4.10)$$

$$C_{(m+1)j} = 0 \quad , \qquad j = 1,2,\ldots,n \qquad (4.11)$$

وبالتالي يتم تحويل نماذج النقل غير المتوازنة إلى نماذج متوازنة لها نفس الخصائص للنماذج المتوازنة السابق ذكرها.

وفي الفصلين التاليين سوف نقدم تحديد نقطة حل مبدئية ممكنة ثم إيجاد الحل الأمثل لنموذج النقل المتوازن.

(٤-٤) الطرق المختلفة لإيجاد حل مبدئي ممكن

Different Methods to Find Initial Feasible Solution

نظراً لخصائص نموذج النقل السابق عرضها، فإنه يمكن إيجاد نقطة حل مبدئية ممكنة بطرق أسهل من طرق السمبلكس العادية المقدمة في الباب الثالث.

وفي هذا الفصل سوف نتناول طريقتين من طرق الحصول على حل مبدئي ممكن لنموذج النقل وهما:

١- طريقة الركن الشمالي الغربي North-West Corner Method

٢- طريقة أقل تكلفة Least Cost Method

<u>أولاً: طريقة الركن الشمالي الغربي</u>: لا تعتمد هذه الطريقة على أي قاعدة رياضية Mathematical Rule – ويمكن تلخيص خطوات هذه الطريقة فيمايلي:

(١) اختيار الخلية الواقعة في الركن الشمالي الغربي من جدول التكاليف (جدول (٤-١)) أي في العمود (1) والصف (1) أيضاً. ثم مقارنة كل من S_1, D_1 على النحو التالي:

أ- إذا كان $S_1 > D_1$، فينقل من مركز الإنتاج (1) الكمية X_{11} بحيث $X_{11} = D_1$ إلى مركز الاستهلاك (1). وبذلك تكون جميع احتياجات مركز الاستهلاك (1) تم تغطيتها من مركز الإنتاج (1) فقط، ويتبقى بمركز الإنتاج (1) عدد وحدات مساوي $(S_1 - D_1)$.

ملحوظة: وفي هذه الحالة تكون جميع الكميات المنقولة من مراكز الإنتاج الأخرى أي $i = 2,3,...,m$ إلى مركز الاستهلاك الأول تساوي صفر أي $i = 2,3,...,m \; , X_{i1} = 0$. وبذلك يتم إغلاق مركز الاستهلاك (1) بخط للإشارة إلى أن مركز الاستهلاك (1) تم تغطية احتياجاته.

ب- إذا كان $S_1 < D_1$، فينتقل من مركز الإنتاج (1) الكمية X_{11} إلى مركز الاستهلاك (1) بحيث $X_{11} = S_1$. ويتبقى احتياجات لمركز الاستهلاك (1) تساوي $(D_1 - S_1)$ يتم تغطيتها من باقي مراكز الإنتاج الأخرى.

وفي هذه الحالة يكون $X_{1j} = 0$ ، $j = 2,3,...,n$. وبذلك يتم إغلاق مركز الإنتاج (1) بخط للإشارة إلى أن مركز الإنتاج (1) تم استنفاذ جميع الكميات المتاحة لديه.

(٢) وبنفس الأسلوب المتبع في الخطوة (١) يتم تغطية جميع الكميات المطلوبة بمراكز الاستهلاك من جميع مراكز الإنتاج.

(٣) وبعد تغطية جميع مراكز الاستهلاك من مراكز الإنتاج يتم حساب تكلفة النقل C على النحو:

$$C = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + ... + C_{mn}X_{mn}$$

وسوف نوضح خطوات تحديد الحل المبدئي الممكن السابقة من خلال الأمثلة التالية.

مثال (٤-١): الجدول التالي يوضح تكلفة نقل الوحدة الواحدة من مراكز إنتاج أحدى السلع إلى مراكز استهلاكها كذلك الكميات المتاحة لدى كل مركز إنتاج والكميات المطلوبة لكل مركز استهلاك.

جدول (٤-٢)

مراكز الاستهلاك / مراكز الإنتاج	1	2	3	4	الكميات المتاحة
1	2	7	5	3	1000
2	10	5	2	5	700
3	13	8	3	7	300
الكميات المطلوبة	300	500	700	500	2000

والمطلوب: إيجاد حل مبدئي ممكن باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي.

الحل: من الجدول يتضح أن مشكلة النقل متوازنة حيث الكميات المتاحة تساوي المطلوبة، أي $\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j = 2000$ - لذلك يتم تحديد الحل المبدئي الممكن مباشرة. ولإيجاد حل مبدئي ممكن نتبع الخطوات التالية:

١- نعتبر جدول (٤-٢) بحيث نضع التكلفة في كل خليه في أقصى الشمال الغربي من الخلية مع مربع بهدف وضع الكمية X_{ij} في باقي الخلية رقم (ij)، كما هو موضح في جدول (٤-٣).

جدول (٤-٣)

مراكز الاستهلاك / مراكز الإنتاج	1	2	3	4	الكميات المتاحة	
1	2 ~~300~~	7 ~~500~~	5 ~~200~~	3	~~1000~~	~~700~~ ~~200~~
2	10	5	2 ~~500~~	5 ~~200~~	~~700~~	200
3	13	8	3	7 ~~300~~	~~300~~	
الكميات المطلوبة	300	500	700	500	2000	
			500	300		

٢- من جدول (٤-٢) نجد أن الكمية المطلوبة مركز الاستهلاك (1) تساوي 300 والكمية المتاحة في مركز الإنتاج (1) تساوي 1000 وبالتالي نجد أن $X_{11} = 300$، وبالتالي فإن جميع احتياجات مركز الاستهلاك الأول يتم تغطيتها من مركز الإنتاج (1) ويتم تغطية مركز الاستهلاك الأول ويتبقى عدد وحدات يساوي 700(1000-300) بمركز الإنتاج الأول كما هو موضح بجدول (٤-٣).

٣- ننتقل إلى مركز الاستهلاك (2) فنجد أنه يحتاج عدد 500 وحدة، وأن مركز الإنتاج الأول لديه 700 وحدة. وبالتالي يمكن تغطية احتياجات مركز الاستهلاك الثاني من مركز الإنتاج الأول أي $X_{12} = 500$ ويتبقى بمركز الإنتاج الأول عدد وحدات يساوي 200(700-500).

٤- ننتقل إلى مركز الاستهلاك (3) فنجد أنه يحتاج عدد 700 وحدة في حين أن مركز الإنتاج الأول لديه 200 وحدة فقط، فيتم نقل 200 وحدة من

مركز الإنتاج الأول إلى مركز الاستهلاك الثالث أي $X_{13} = 200$. وبذلك يتم استنفاذ جميع الوحدات بمركز الإنتاج (1) ولكن يظل مركز الاستهلاك (3) في احتياج إلى عدد 500 وحدة (700-200).

٥- ننتقل إلى مركز الإنتاج (2) ومركز الاستهلاك (3) فنجد أن مركز الإنتاج به 700 وحدة ومركز الاستهلاك (3) يحتاج إلى 500 وحدة فيتم نقل 500 وحدة من المركز.

٦- ومما سبق نجد أن جميع مراكز الإنتاج تم استنفاذ الكميات المتاحة لديها وأن الكميات المطلوبة في مراكز الاستهلاك تم تغطيتها. وفي هذه الحالة تكون تكلفة النقل C حيث:

$$\begin{aligned} C &= C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{13}X_{13} + C_{23}X_{23} + C_{24}X_{24} + C_{34}X_{34} \\ &= 2(300) + 7(500) + 5(200) + 2(500) + 5(200) + 7(300) \\ &= 600 + 3500 + 1000 + 1000 + 1000 + 2100 \\ &= 9200 \quad \text{جنيه} \end{aligned}$$

<u>ملاحظات:</u>

١- من الجدول السابق نجد أن الحل المبدئي:

$X_{11} = 300, X_{12} = 500, X_{13} = 200, X_{23} = 500, X_{24} = 200, X_{34} = 300$
نقطة حل مبدئية ممكنة.

٢- في هذا المثال نجد عدد القيود المستقلة يساوي 6 $(m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6)$ كذلك عدد المتغيرات يساوي nm يساوي $(3 \times 4 = 12)$12 بحيث تكون عدد المتغيرات الأساسية الداخلة في الحل تساوي 6 $(m + n - 1)$ وعدد المتغيرات غير الأساسية (أي غير الداخلة في الحل) تساوي 6 $[mn - (m + n - 1) = 3(4) - (3 + 4 - 1) = 6]$.

٣- في جدول (٤-٣) الخلايا التي لا تحتوي على قيم X_{ij} (أي خلايا تمثل المتغيرات غير الأساسية) فإن قيمة X_{ij} فيها تساوي صفر أي $X_{ij} = 0$ لبعض قيم i ، j.

مثال (٤-٢): الجدول التالي يوضح تكلفة نقل الوحدة الواحدة من أحدى المنتجات من 3 مصانع A , B , C تقوم بإنتاج هذه السلعة إلى مراكز الاستهلاك I , II , III كذلك الكميات المتاحة لدى كل مصنع والكميات المطلوبة في كل مركز استهلاك.

١- كون نموذج النقل.

٢- أوجد حل مبدئي ممكن باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي.

جدول (٤-٤)

مراكز الاستهلاك / المصانع	I	II	III	الكميات المتاحة
A	12	15	13	5000
B	20	22	17	7000
C	15	18	12	3000
الكميات المطلوبة	2000	6000	4000	15000 / 12000

الحل: ١- من الجدول نجد أن مجموع الكميات المعروضة من المصانع تساوي 15000 أكبر من مجموع الكميات المطلوبة لمراكز الاستهلاك التي تساوي 12000 لذلك نفترض مركز استهلاك وهمي (IV) تكون الكميات المطلوبة له تساوي

3000 ($15000 - 12000 = 3000$) وتكلفة نقل الوحدة من أي مركز إنتاج لهذا المركز الوهمي تساوي صفر كما هو موضح في جدول (٤-٥).

إذا فرضنا أن X_{ij} تشير إلى الكمية التي يجب نقلها من مركز الإنتاج (i) بحيث $i = 1,2,3$ إلى مركز الاستهلاك (j) حيث $j = 1,2,3,4$. وبالتالي فإن نموذج النقل يصبح على النحو التالي:

أوجد قيم X_{ij} بحيث:

$$\text{Min.}Z = 12\,X_{11} + 15\,X_{12} + 13\,X_{13} + 0\,X_{14} + 20\,X_{21} + 22\,X_{22} + 17\,X_{23} + 0\,X_{24} + 15\,X_{31} + 18\,X_{32} + 12\,X_{33} + 0\,X_{34}$$

S.T

$$\left.\begin{aligned} X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} &= 5000 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} &= 7000 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} &= 3000 \end{aligned}\right\} \text{قيود الكميات المعروضة}$$

$$\left.\begin{aligned} X_{11} + X_{21} + X_{31} &= 2000 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} &= 6000 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} &= 4000 \\ X_{14} + X_{24} + X_{34} &= 3000 \end{aligned}\right\} \text{قيود الكميات المطلوبة}$$

$$X_{ij} \geq 0 \qquad i, j = 0,1,2,\ldots$$

٢- والجدول التالي يوضح الحل المبدئي الممكن باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي. ومن الجدول يتضح أن الحل المبدئي الممكن:

$$X_{11} = 2000\ , X_{12} = 3000\ , X_{22} = 3000\ , X_{23} = 4000\ ,$$
$$X_{34} = 3000\ , X_{21} = X_{13} = 0$$

جدول (٤-٥)

مراكز الاستهلاك / مراكز الإنتاج	I	II	III	IV	الكميات المتاحة	
A	12 2000	15 3000	13	0	~~5000~~	3000
B	20	22 3000	17 4000	0	~~7000~~	4000
C	15	18	12	0 3000	3000	
الكميات المطلوبة	2000	6000	4000	3000	15000	
		3000				

وتكلفة النقل في هذه الحالة C حيث:

$$C = 12(2000) + 15(3000) + 22(3000) + 17(4000) + 0(3000)$$
$$= 24000 + 45000 + 66000 + 68000$$
$$= 203000$$ جنيه

ملحوظة: نلاحظ أن عدد المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل تساوي 5 أي أقل من 6 $(m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6)$ لذا تم* اعتبار كل من X_{21}, X_{13} متغيرات أساسية وتساوي قيمة كل منها صفر.

<u>ثانياً: طريقة أقل تكلفة</u>: تعتمد هذه الطريقة على قاعدة الأقل تكلفة حيث يتم نقل الوحدات من مركز الإنتاج إلى مركز الاستهلاك ذات تكلفة أقل وفقاً للكمية المطلوبة والكمية المتاحة. ثم الانتقال إلى مركز إنتاج ومركز استهلاك آخر ذات تكلفة أكبر مباشرةً من التكلفة السابقة لها مباشرة، وهكذا يتم تزويد جميع مراكز الاستهلاك باحتياجاتها من مراكز الإنتاج.

---

* ويمكن اختيار أي متغير غير أساسي ليكون متغير أساسي بحيث تكون قيمته تساوي صفر[٦].

وتعتبر هذه الطريقة أفضل من طريقة الركن الشمالي الغربي في أنها تعطي حل مبدئي في معظم الحالات أفضل (أي أقرب من الحل الأمثل).

وسوف نوضح هذه الطريقة من خلال الأمثلة التالية.

مثال (٤-٣): أعتبر مشكلة النقل في مثال (٤-١)، أوجد حل مبدئي ممكن باستخدام طريقة أقل تكلفة.

الحل: ١- من جدول (٤-٢) نجد أن أقل تكلفة هي C_{11} حيث $C_{11} = 2$ مناظرة لمركز الإنتاج (1) ومركز الاستهلاك (1)، فنجد أن مركز الاستهلاك (1) يحتاج 300 وحدة ومركز الإنتاج (1) لديه 1000 وحدة، وبالتالي يمكن نقل 300 وحدة من مركز الإنتاج (1) إلى مركز الاستهلاك (1) وبذلك يكون قد تم تغطيت مراكز الاستهلاك (1).

ملحوظة: $C_{23} = 2$ أيضاً، فكان من الممكن اعتبار $C_{11} = 2$ أقل تكلفة أو اعتبار $C_{23} = 2$ هي أقل تكلفة. فنظراً لاختيار $C_{11} = 2$ أولاً، بالتالي يتم اختيار $C_{23} = 2$ في الخطوة التالية مباشرةً.

٢- من الجدول نجد أن $C_{23} = 2$ فنجد أن مركز الاستهلاك (3) يحتاج إلى 700 ومركز الإنتاج (2) لدية 700 وبالتالي يكون تم تغطية مركز الاستهلاك (3) واستنفاذ الوحدات بمركز الإنتاج (2).

جدول (٤-٦)

مراكز الاستهلاك / مراكز الإنتاج	1	2	3	4	الكميات المتاحة	
1	2	300	7	200	5	3	500	1000	~~700~~ 20
2	10	5	2	700	5	~~700~~	
3	13	8	300	3	7	300	
الكميات المطلوبة	300	500	700	500	2000	
		300				

٣- بما أن التكلفة التالية مباشرةً هي $C_{14} = 3$ ففي هذه الحالة نجد أن مركز الاستهلاك 4 يحتاج 500 وحدة ويوجد بمركز الإنتاج (1) 700 وحدة بالتالي فإنه يتم نقل 500 وحدة من مركز الإنتاج (1) إلى مركز الاستهلاك (4)، ويترتب على ذلك تغطية طلب المركز (4) ويتبقى عدد وحدات 200 وحدة بمركز الإنتاج الأول.

٤- نجد أن التكلفة $C_{12} = 7$ هي التكلفة التالية مباشرةً، فنجد أن مركز الاستهلاك (2) يحتاج إلى 500 وحدة ولكن مركز الإنتاج (1) لديه 200 وحدة فقط، بالتالي يتم نقل عدد 200 وحدة من مركز الإنتاج (1) إلى مركز الاستهلاك (2) وبذلك يكون مركز الإنتاج (1) قد أستنفذ الوحدات المتاحة لديه، ومازال مركز الاستهلاك (2) يحتاج إلى 300 وحدة.

٥- ثم نجد أن التكلفة التالية مباشرة $C_{32} = 8$، حيث يحتاج مركز الاستهلاك (2) إلى 300 وحدة ويوجد بمركز الإنتاج (3) عدد 300 وحدة يتم نقلها إلى مركز الاستهلاك (2) كما هو موضح بجدول (٤-٦).

ويكون الحل المبدئي الممكن على النحو:

$$X_{11} = 300, X_{12} = 200, X_{14} = 500, X_{23} = 700, X_{32} = 300, X_{34} = 0$$

وتكون تكلفة النقل في هذه الحالة على النحو:

$$C = 2(300) + 7(200) + 3(500) + 2(700) + 8(300)$$
$$= 600 + 1400 + 1500 + 1400 + 2400 = 7300 \text{ جنيه}$$

ومن مثال (٤-١) نجد أن التكلفة باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي لهذا المثال تساوي 9300 جنيه أي أكبر من التكلفة باستخدام طريقة أقل تكلفة حيث كانت قيمة تكلفة النقل باستخدام طريقة أقل تكلفة تساوي 7300 جنيه.

أي أن الحل المبدئي الممكن باستخدام طريقة أقل تكلفة أفضل من الحل المبدئي باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي ويكافئه.

<u>مثال (٤-٤)</u>: أوجد حل مبدئي ممكن باستخدام طريقة أقل تكلفة لمشكلة النقل في مثال (٤-٢).

الحل: من جدول (٤-٤) يمكن إيجاد حل مبدئي ممكن بطريقة أقل تكلفة كما هو موضح بالجدول التالي:

$$X_{11} = 2000, X_{12} = 2000, X_{13} = 1000, X_{22} = 4000,$$
$$X_{24} = 3000, X_{33} = 3000$$

جدول (٤-٧)

مراكز الاستهلاك / مراكز الإنتاج	I	II	III	IV	الكميات المتاحة	
A	12 ~~2000~~	15 ~~2000~~	13 ~~1000~~	0	~~5000~~	3000,
B	20	22 4000	17	0 3000	7000	3000
C	15	18	12 ~~3000~~	0	~~3000~~	
الكميات المطلوبة	2000	6000	4000	3000	1500	
		4000	1000			

وتكلفة النقل في هذه الحالة C على النحو:

$$C = 12(2000) + 15(2000) + 13(1000) + 22(4000) + 0(3000) + 12(3000)$$

$$= 24000 + 30000 + 13000 + 88000 + 0 + 36000$$

$$= 191000 \text{ جنيه}$$

ملحوظة: بالرجوع إلى مثال (٤-٢) نجد أن قيمة التكلفة باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي أكبر منها باستخدام طريقة أقل تكلفة.

(٤-٥) الطرق المختلفة لإيجاد الحل الأمثل

Different Methods to Find the Optimum Solution

في الفصل السابق تناولنا بعض طرق إيجاد حل أساسي مبدئي ممكن لنموذج النقل حيث يعتبر هذا الحل المبدئي الخطوة الأولى للحصول على الحل الأمثل للنموذج. ويوجد طرق متعددة مختلفة للحصول على الحل الأمثل منها على سبيل المثال:

- طريقة المسارات المغلقة (المسار المتعرج) **Stopping Stone Method**
- طريقة التوزيع المعدل **Modified Distribution Method** وأحياناً تسمى بطريقة المضاريب **Multiplier's Method**.

وتعتمد جميع الطرق المختلفة للحصول على الحل الأمثل على فحص النقط الركنية **Corner Points** المختلفة لفئة الحلول الممكنة والانتقال من نقطة ركنية ممكنة إلى أخرى أفضل، أو بعبارة أخرى تحديد المتغير الداخل **Entering Variable** والمتغير الخارج **Leaving Variable** في كل خطوة.

وتختلف الطرق المختلفة لإيجاد الحل الأمثل في كيفية تحديد النقطة الطرفية التي يتم الانتقال إليها في كل خطوة ولكن جميع هذه الطرق تعتمد على أسلوب السمبلكس للحصول على الحل الأمثل.

وسوف نكتفي في هذا الفصل بتقديم طريقة المسارات المغلقة. لذلك سوف نعرض أولاً تعريف كل من المسار المغلق **Closed Loop** والتكلفة الحدية للمسار المغلق **Marginal Cost of Closed Loop**.

المسار المغلق:* هو مسار يبدأ من الخلية (المربع) الذي يمثل متغير غير أساسي (بجدول الحل الأساسي المبدئي) وينتهي عندها ويتكون من خطوط أفقية وأخرى رأسية أركانها عبارة عن متغيرات أساسية (خلايا مملوءة، أي $X_{ij} \neq 0$)، وإذا تصادف وجود متغيرين أساسيين في طريق المسار فإننا نعرج عن المتغير الأساسي غير الركني.

التكلفة الحدية للمسار: هي مقدار التغير في قيمة دالة الهدف (بالزيادة أو النقصان) الممكن أن ينشأ عن زيادة قيمة المتغير غير الأساسي بالمسار المغلق بوحدة واحدة، وسوف نشير إلى هذه التكلفة الحدية المناظرة للمتغير غير الأساسي والذي سوف نشير له بالرمز $X_{ij}^{\backslash}$ بالرمز $C_{ij}^{\backslash}$. ويتم حساب $C_{ij}^{\backslash}$ بأن نبدأ المسار بوضع أشارة + ثم تليها أشارة − بالتناوب وأن تسبق C_{ij} المرتبطة على أركان المسار ثم يتم جمع التكاليف المقابلة لأركان المسار المغلق حسب أشاراتهم أي:

$$C_{ij}^{\backslash} = +C_{ij} - C_{kt} + ... - .....$$

حيث C_{ij}، C_{kt} ، .... تشير إلى تكلفة الوحدة الواحدة للمتغيرات الأساسية الركنية.

وبالتالي يكون عدد المسارات المغلقة يساوى عدد المتغيرات غير الأساسية (أو بعبارة أخرى الخلايا التي لا تحتوى على X_{ij}).

ويمكن تلخيص خطوات طريقة المسارات المغلقة في الخطوات التالية:

*د. إبراهيم نائب، د. أنعام باقية (١٩٩٩): "بحوث العمليات خوارزميات وبرامج حاسوب"

الخطوة الأولى: إيجاد حل أساسي مبدئي ممكن، وتحديد المتغيرات غير الأساسية عند هذا الحل.

الخطوة الثانية: ١- تحديد المسارات المغلقة لجميع المتغيرات غير الأساسية.

٢- تحديد التكلفة الحدية لكل مسار مغلق C'_{ij}:

أ- إذا كانت قيمة التكلفة الحدية لجميع المسارات المغلقة تساوي صفر أو قيمة موجبة - فهذا يعنى أن الحل الحالي Current Solution هو الحل الأمثل (أي تحقيق شرط الأمثلية).

ب- أما إذا وجدت قيمة سالبة لواحد أو أكثر من المسارات المغلقة فهذا يعنى أننا لم نصل بعد إلى الحل الأمثل وننتقل إلى الخطوة التالية.

الخطوة الثالثة: ١- تحديد المسار ذو التكلفة الحدية السالبة، وأن وجد أكثر من تكلفة حدية سالبة، فإننا نختار المسار ذو التكلفة الحدية السالبة الأقل، فيكون المتغير غير الأساسي المناظر لهذا المسار هو المتغير الداخل (والانتقال إلى حل أساسي آخر).

٢- بالنسبة للمسار الذي تم تحديده، نختار من المتغيرات الأساسية فيه متغير أساسي بإشارة سالبة كمتغير خارج بحيث يكون هذا المتغير هو المتغير المناظر للقيمة الأكثر سالبة (أي أكبر عدد بإشارة سالبة) في التكلفة الحدية (شرط الإتاحة) فإذا كانت قيمة هذا المتغير تساوي Q - فيتم إضافة

Q إلى المتغيرات ذات الإشارة الموجبة وطرح الكمية Q من المتغيرات ذات الإشارة السالبة.

ملحوظة: في حالة تعذر نقل الكمية Q المناظرة للمتغير الذي له أقل قيمة بإشارة سالبة في التكلفة الحدية فإنه يتعذر خروج هذا المتغير ويتم اختيار متغير خارج آخر من المتغيرات الأساسية في المسار السابق تحديده بالقيمة السالبة تالية مباشرةً. كما سوف نوضح في المثال.

الخطوة الرابعة: تحديد نقطة الحل الأساسي الجديد ويتم حساب تكلفة النقل C ثم نعود إلى الخطوة الثانية لاختبار شرط الأمثلية.

وفيما يلي سوف نوضح الخطوات السابقة من خلال الأمثلة التالية:

مثال (٤-٥): أعتبر مثال (٤-٤)، حيث الحل المبدئي لنموذج النقل موضح بجدول (٤-٧) على النحو الموضح:

مراكز الاستهلاك / مراكز الإنتاج	I	II	III	IV	الكميات المتاحة
A	12 2000	15 2000 (+)	13 1000 (-)	0	5000
B	20	22 4000 (-)	17 (+)	0 3000	7000
C	15	18	12 3000	0	3000
الكميات المطلوبة	2000	6000	4000	3000	15000

١- بما أن المتغيرات الأساسية هي:

$$X_{11} = 2000, X_{12} = 2000, X_{13} = 1000, X_{22} = 4000,$$
$$X_{24} = 3000, X_{33} = 3000, X_{24} = 3000$$

وتكون التكلفة عند هذا الحل المبدئي C_0:

$$C_0 = 191000 \text{ جنيه}$$

وبالتالي فإن المتغيرات غير الأساسية هي:

$$X_{14}, X_{21}, X_{23}, X_{31}, X_{32}, X_{34}$$

٢- نحدد المسارات المغلقة لجميع المتغيرات غير الأساسية أو حساب التكلفة الحدية لكل مسار كما هو موضح في الجدول التالي:

جدول (٤-٨)

رقم المسار	المتغير غير الأساسي	المسار	التكلفة الحدية للمسار $\bar{c}_{ij}$
1	x_{14}	$x_{14} \to x_{12} \to x_{22} \to x_{24}$	$+0-15+22-0=+7$
2	x_{21}	$x_{21} \to x_{11} \to x_{12} \to x_{22}$	$+20-12+15-22=+1$
3	x_{23}	$x_{23} \to x_{13} \to x_{12} \to x_{22}$	$+17-13+15-22=-3 \to$
4	x_{31}	$x_{31} \to x_{11} \to x_{13} \to x_{33}$	$+15-12+13-12=+4$
5	x_{32}	$x_{32} \to x_{12} \to x_{13} \to x_{33}$	$+18-15+13-12=+4$
6	x_{34}	$x_{34} \to x_{33} \to x_{13} \to x_{12} \to x_{22} \to x_{24}$	$+0-12+13-15+22-0=+8$

ومن الجدول يتضح أن التكلفة الحدية للمسار رقم (3) سالبة بالتالي إذا دخل المتغير غير الأساسي X_{23} في الحل سوف يحسن دالة الهدف. لذا سوف يكون هو المتغير الداخل في نقطة الحل التالية، كذلك يكون المتغير الخارج هو المتغير

X_{22} (أي أقل قيمة سالبة) حيث أنه يناظر (22-) في التكلفة الحدية ولكن نظراً لتعذر نقل الكمية X_{22}، أي $Q = 4000$ أي يتعذر إخراج المتغير X_{22} لذلك ننتقل إلى المتغير X_{13} حيث $X_{13} = 1000$ الذي يناظر التكلفة الحدية (13-) التي تلي (22-) – أنظر الملاحظة السابقة. وننتقل إلى نقطة حل أخرى كما هو موضح في الجدول التالي:

جدول (٤-٩)

مراكز الاستهلاك / مراكز الإنتاج	I	II	III	IV	الكميات المتاحة
A	12 　 2000	15 　 3000	13	0	5000
B	20	22 　 3000	17 　 1000	0 　 3000	7000
C	15	18	12 　 3000	0	3000
الكميات المطلوبة	2000	6000	4000	3000	15000

ويكون الحل في هذه النقطة:

$$X_{11} = 2000, X_{12} = 3000, X_{22} = 3000, X_{23} = 1000,$$
$$X_{33} = 3000, X_{23} = 3000$$

والمتغيرات غير الأساسية هي:

$$X_{13}, X_{14}, X_{21}, X_{31}, X_{32}, X_{34}$$

وتكون التكلفة عند هذا الحل C_1 على النحو:

$$C_1 = 12(2000) + 15(3000) + 22(3000) + 17(1000) +$$
$$0(3000) + 12(3000)$$
$$= 24000 + 45000 + 66000 + 17000 + 0 + 36000$$
$$= 188000 \text{ جنيه}$$

وبمقارنة C_1، C_0 نجد أن C_1 أقل من C_0 أي الحل الحالي أفضل من الحل السابق.

٣- نحدد المسارات المغلقة لجميع المتغيرات غير الأساسية وحساب التكلفة الحدية المناظرة لكل مسار كما هو موضح في الجدول التالي:

جدول (٤-١٠)

رقم المسار	المتغير غير الأساسي	المسار	التكلفة الحدية للمسار
1	x_{13}	$x_{13} \to x_{23} \to x_{22} \to x_{12}$	$+13-17+22-15=+3$
2	x_{14}	$x_{14} \to x_{24} \to x_{22} \to x_{12}$	$+0-0+22-15=+7$
3	x_{21}	$x_{21} \to x_{11} \to x_{12} \to x_{22}$	$+20-12+15-22=+1$
4	x_{31}	$x_{31} \to x_{33} \to x_{23} \to x_{22} \to x_{12} \to x_{11}$	$+15-12+17-22+15-12=+1$
5	x_{32}	$x_{32} \to x_{22} \to x_{23} \to x_{33}$	$+18-22+17-12=+1$
6	x_{34}	$x_{34} \to x_{24} \to x_{23} \to x_{33}$	$+0-0+17-12=+5$

من الجدول يتضح أن التكلفة الحدية المناظرة لكل مسار مناظر لكل متغير من المتغيرات غير الأساسية قيمتها غير سالبة، وهذا يعنى أن الحل الحالي هو الحل الأمثل.

مثال (٤-٦): الجدول التالي يوضح تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصانع A , B , C إلى مراكز الاستهلاك I , II , III , IV كذلك الكميات المتاحة لدى كل مصنع والكميات المطلوبة في كل مركز استهلاك.

١- أوجد حل أساسي مبدئي باستخدام طريقة أقل تكلفة.

٢- أوجد الحل الأمثل.

جدول (٤-١١)

مراكز الاستهلاك / مراكز الإنتاج	I	II	III	IV	الكميات المتاحة
A	19	7	3	21	100
B	15	21	18	6	300
C	11	14	15	22	200
الكميات المطلوبة	150	100	200	150	600

الحل: ١- الجدول التالي يوجد الحل المبدئي باستخدام طريقة أقل تكلفة.

جدول (٤-١٢)

مراكز الاستهلاك / مراكز الإنتاج	I	II	III	IV	الكميات المتاحة	
A	19 (+)	7	3 (-) 100	21	100	
B	15	21 50 (-)	18 100 (+)	6 150	300	150
C	1 150 (-)	14 50 (+)	15	22	200	150
الكميات المطلوبة	150	100	200	150	600	
		50	100			

من الجدول يتضح أن المتغيرات الأساسية على النحو التالي:

$$X_{13} = 100 , X_{23} = 100 , X_{22} = 50 , X_{24} = 150 , X_{31} = 150 , X_{32} = 50$$

والمتغيرات غير الأساسية هي:

$$X_{11} , X_{12} , X_{14} , X_{21} , X_{33} , X_{34}$$

كذلك نجد أن التكلفة C_0 بحيث:

$$C_0 = 3(100) + 21(50) + 18(100) + 6(150) + 11(150) + 14(50)$$
$$= 300 + 1050 + 1800 + 900 + 1650 + 700$$
$$= 6400$$ جنيه

٢- تحديد التكلفة الحدية المناظرة للمسارات المغلقة للمتغيرات غير الأساسية على النحو الموضح في الجدول التالي:

جدول (٤-١٣)

رقم المسار	المتغير غير الأساسي	المسار	التكلفة الحدية للمسار
1	x_{11}	$x_{11} \rightarrow x_{31} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{13}$	$+19-11+14-21-18+3=-14 \rightarrow$
2	x_{12}	$x_{12} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{13}$	$+7-21+18-3=+1$
3	x_{14}	$x_{14} \rightarrow x_{24} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{13}$	$+21-6+18-3=+30$
4	x_{21}	$x_{21} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{32} \rightarrow x_{31}$	$+15-21+14-11=-4$
5	x_{33}	$x_{33} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{32}$	$+15-18+21-14=+4$
6	x_{34}	$x_{34} \rightarrow x_{24} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{32}$	$+22-6+21-14=+23$

من الجدول السابق يتضح أن أقل تكلفة حدية بالسالب مناظرة للمسار (1) وبالتالي دخول المتغير X_{11} سوف يحسن الحل، وبما أن التكلفة الحدية للمسار (-21) مناظرة للمتغير الأساسي X_{22} وبالتالي يصبح المتغير X_{22} هو الخارج وتكون Q تساوي 50 وحدة.

٣- والجدول التالي يوضح الحل بعد خروج X_{22} ودخول X_{11}.

جدول (٤-١٤)

مراكز الاستهلاك / مراكز الإنتاج	I	II	III	IV	الكميات المتاحة
A	[19] 50 (+)	[7]	[3] 50 (-)	[21]	100
B	[15] (-)	[21]	[18] 150 (+)	[6] 150	300
C	[1] 100	[14] 100	[15]	[22]	200
الكميات المطلوبة	150	100	200	150	600

وتكون المتغيرات الأساسية في هذه الحالة:

$$X_{11} = 50, X_{13} = 50, X_{23} = 150, X_{24} = 150, X_{31} = 100, X_{32} = 100$$

والمتغيرات غير الأساسية هي:

$$X_{12}, X_{14}, X_{21}, X_{22}, X_{33}, X_{34}$$

وتكون التكلفة في هذه الحالة C_2 على النحو:

$$C_2 = 19(50) + 3(50) + 6(150) + 18(150) + 11(100) + 14(100)$$
$$= 950 + 150 + 900 + 2700 + 1100 + 1400$$
$$= 7200 \text{ جنيه}$$

٤- نحدد المسارات للمتغيرات غير الأساسية والتكلفة الحدية المناظرة لكل مسار على النحو الموضح في الجدول التالي:

جدول (٤-١٥)

التكلفة الحدية للمسار	المسار	المتغير غير الأساسي	رقم المسار
$+7-19+11-14=-15$	$x_{12} \to x_{11} \to x_{31} \to x_{32}$	x_{12}	1
$+2-6+18-3=+11$	$x_{14} \to x_{24} \to x_{23} \to x_{13}$	x_{14}	2
$+15-18+3-19=-19 \to$	$x_{21} \to x_{23} \to x_{13} \to x_{11}$	x_{21}	3
$+21-18+3-19+11$ $-14=-16$	$x_{22} \to x_{23} \to x_{13} \to x_{11}$ $\to x_{31} \to x_{32}$	x_{22}	4
$+15-3+19-11=+20$	$x_{33} \to x_{13} \to x_{11} \to x_{31}$	x_{33}	5
$+22-6+18-3+19$ $-11=+39$	$x_{34} \to x_{24} \to x_{23} \to x_{13}$ $\to x_{11} \to x_{31}$	x_{34}	6

من الجدول السابق يتضح أن المتغير الداخل هو X_{21} والمتغير الخارج X_{11} حيث $Q=50$ - والجدول التالي يوضح الحل في هذه الحالة.

جدول (٤-١٦)

مراكز الاستهلاك / مراكز الإنتاج	I	II	III	IV	الكميات المتاحة
A	[19]	[7]	[3] 100	[21]	100
B	[15] 50	[21]	[18] 100	[6] 150	300
C	[11] 100	[14] 100	[15]	[22]	200
الكميات المطلوبة	150	100	200	150	600

وتكون المتغيرات الأساسية في هذه الحالة:

$$X_{21}=50, X_{13}=100, X_{23}=100, X_{24}=150, X_{31}=100, X_{32}=100$$

والمتغيرات غير الأساسية هي:

$$X_{11}, X_{12}, X_{14}, X_{22}, X_{33}, X_{34}$$

وتكون التكلفة في هذه الحالة:

$$\begin{aligned} C_3 &= 3(100) + 15(50) + 18(100) + 6(150) + 11(100) + 14(100) \\ &= 300 + 750 + 1800 + 900 + 1100 + 1400 \\ &= 6250 \text{ جنيه} \end{aligned}$$

٥- نحدد المسارات المناظرة للمتغيرات غير الأساسية في الجدول التالي:

جدول (٤-١٧)

رقم المسار	المتغير غير الأساسي	المسار	التكلفة الحدية للمسار
1	x_{11}	$x_{11} \to x_{21} \to x_{23} \to x_{13}$	$+19-15+18-3=+19$
2	x_{12}	$x_{12} \to x_{13} \to x_{23} \to x_{21} \to x_{31} \to x_{32}$	$+7-3+18-15+11-14=+4$
3	x_{14}	$x_{14} \to x_{24} \to x_{23} \to x_{13}$	$+2-6+18-3=+11$
4	x_{22}	$x_{22} \to x_{21} \to x_{31} \to x_{32}$	$+21-15+11-14=+3$
5	x_{33}	$x_{33} \to x_{23} \to x_{21} \to x_{31}$	$+15-18+15-11=+1$
6	x_{34}	$x_{34} \to x_{24} \to x_{21} \to x_{31}$	$+22-6+15-11=+20$

من الجدول يتضح أن التكلفة الحدية لجميع المسارات موجبة، وهذا يعنى أن الحل الحالي:

$$X_{13}=100, X_{21}=50, X_{23}=100, X_{24}=150, X_{31}=100, X_{32}=100$$

$$C = C_3 = 6250 \text{ جنيه}$$

هو الحل الأمثل.

(٤-٦) الحل باستخدام الحاسب (الحزم الجاهزة)
Computer Solution

في هذا الفصل سوف نتناول كيفية حل نموذج النقل باستخدام حزمة TORA من خلال المثال التالي.

مثال (٤-٧): الجدول التالي يوضح تكلفة نقل الوحدة الواحدة من مركز الإنتاج i Source Cent. إلى مركز الاستهلاك j Destination Cent. كذلك الكميات المتاحة والمطلوبة أيضاً.

جدول (٤-١٨)

i \ j	1	2	3	4	الكميات المتاحة
1	30	50	25	20	1200
2	40	30	35	60	1500
3	25	75	40	50	2400
4	60	15	50	30	1000
الكميات المطلوبة	800	1900	2000	1400	6100

١- أوجد الحل الأمثل النهائي باستخدام حزمة TORA.

٢- أوجد الحل على مراحل متتالية باستخدام حل مبدئي باستخدام طريقة أقل تكلفة.

أولاً: الخطوة (١): ١- يتم فتح برنامج TORA كما هو موضح في ملحق (E).

٢- من القائمة الرئيسية للبرنامج يتم اختيار Transportation Model فيتم فتح النافذة التالية.

شكل (٤-٢)

حيث يتم كتابة أسم المشكلة وعدد مراكز الإنتاج **Sources** وعدد مراكز الاستهلاك **Destinations**.

٣- ثم يتم الضغط على مفتاح **Tab** من لوحة المفاتيح فيظهر جدول أدخال البيانات.

ويتم إدخال البيانات كما هو موضح في الشكل التالي.

شكل (٤-٣)

Problem Title: example 4-6
No. of Sources: 4
No. of Dest'ns: 4

INPUT GRID - TRANSPORTATION

		D1	D2	D3	D4	Supply
	S/D Name					
S1		30.00	50.00	25.00	20.00	1700
S2		40.00	30.00	35.00	80.00	1500
S3		25.00	75.00	40.00	50.00	2400
S4		60.00	15.00	50.00	30.00	1000
Demand		600	1900	2000	1400	

SOLVE Menu MAIN Menu Exit TORA

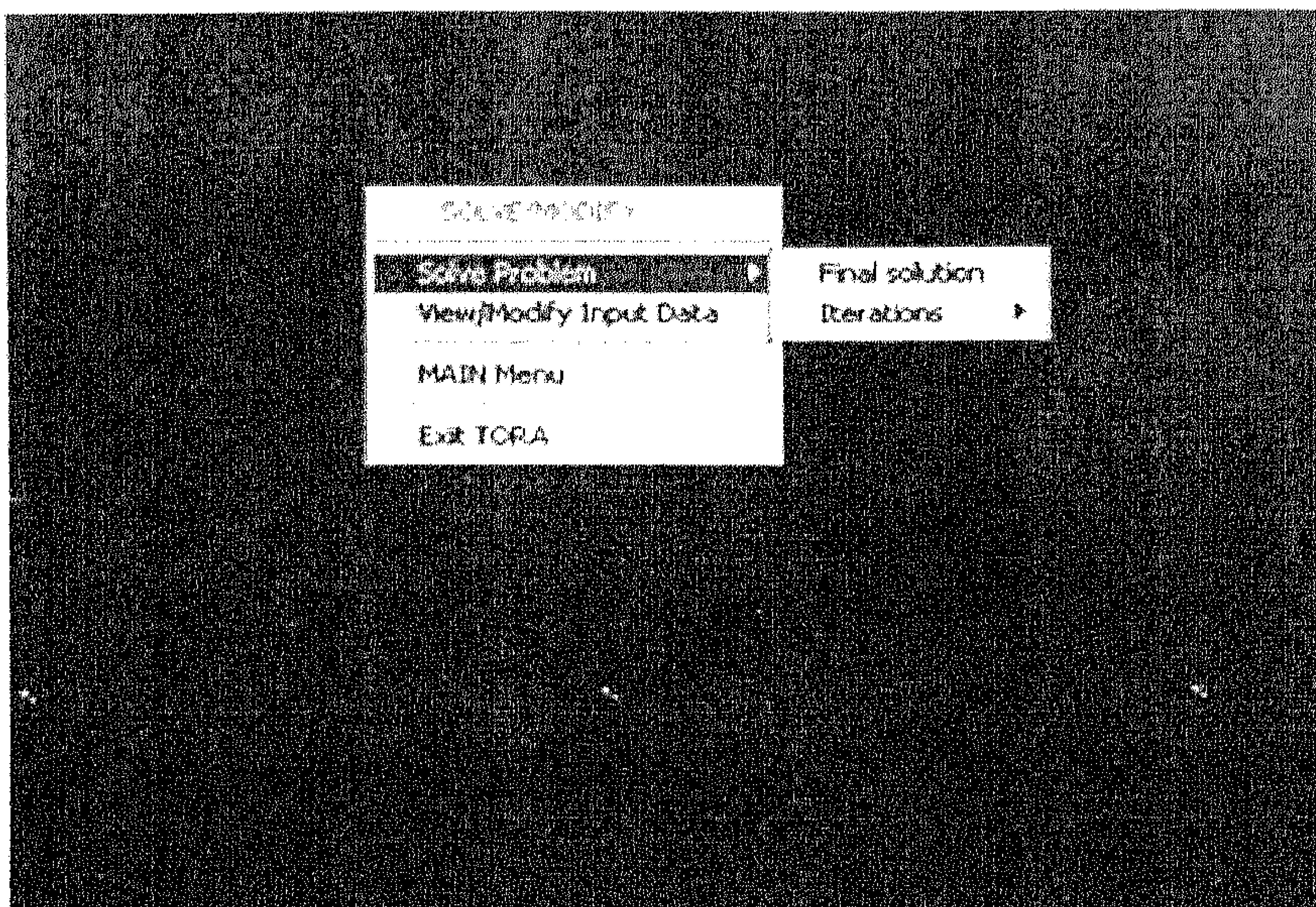
الخطوة (٢): ١- في النافذة الموضحة بشكل (٤-٣) يتم اختيار Solve Menu فتظهر القائمة التالية.

شكل (٤-٤)

Solve Problem
View/Modify Input Data
MAIN Menu
Exit TORA

٢- يتم اختيار **Solve Problem** في القائمة الموضحة بشكل (٤-٤) فيتم فتح القائمة الفرعية للمخرجات في شكل: حل نهائي **Final Solution** أو مراحل متتالية **Iterations**. كما هو موضح في شكل (٤-٥)

شكل (٤-٥)



الخطوة (٣): ١- من القائمة في شكل (٤-٥) يتم اختيار الحل النهائي **Final Solution**.

٢- فتظهر النافذة التي تتضمن أسم المشكلة قيمة النهاية الصغرى للتكلفة **Minimum Cost** كذلك عدد الوحدات المنقولة من **Sources** (S_1,S_2,S_3,S_4) إلى **Destinations** (D_1,D_2,D_3,D_4) كما هو موضح بالشكل (٤-٦). ومن شكل (٤-٦) نجد أن:

$$X^*_{14} = 1200 \ , \ X^*_{22} = 900 \ , \ X^*_{23} = 600 \ , \ X^*_{31} = 800 \ ,$$

$$X^*_{33} = 1400 \ , \ X^*_{34} = 200 \ , \ X^*_{42} = 1000$$

شكل (٤-٦)

TRANSPORTATION MODEL OUTPUT SUMMARY

Title: example 4.6
Final Iteration No.: 1
Objective Value (minimum cost) = 173000.00

Write to Printer

From	To	Amt Shipped	Obj Coeff	Obj Contrib
S1:	D4:	1200	20.00	24000.00
S2:	D2:	900	30.00	27000.00
S2:	D3:	600	35.00	21000.00
S3:	D1:	800	25.00	20000.00
S3:	D3:	1400	40.00	56000.00
S3:	D4:	200	50.00	10000.00
S4:	D2:	1000	15.00	15000.00

View/Modify Input Data | MAIN Menu | Exit TORA

ثانياً:١- من القائمة الموضحة في شكل (٤-٥) يتم اختيار Iterations – فتظهر القائمة الفرعية لطريقة إيجاد الحل المبدئي.

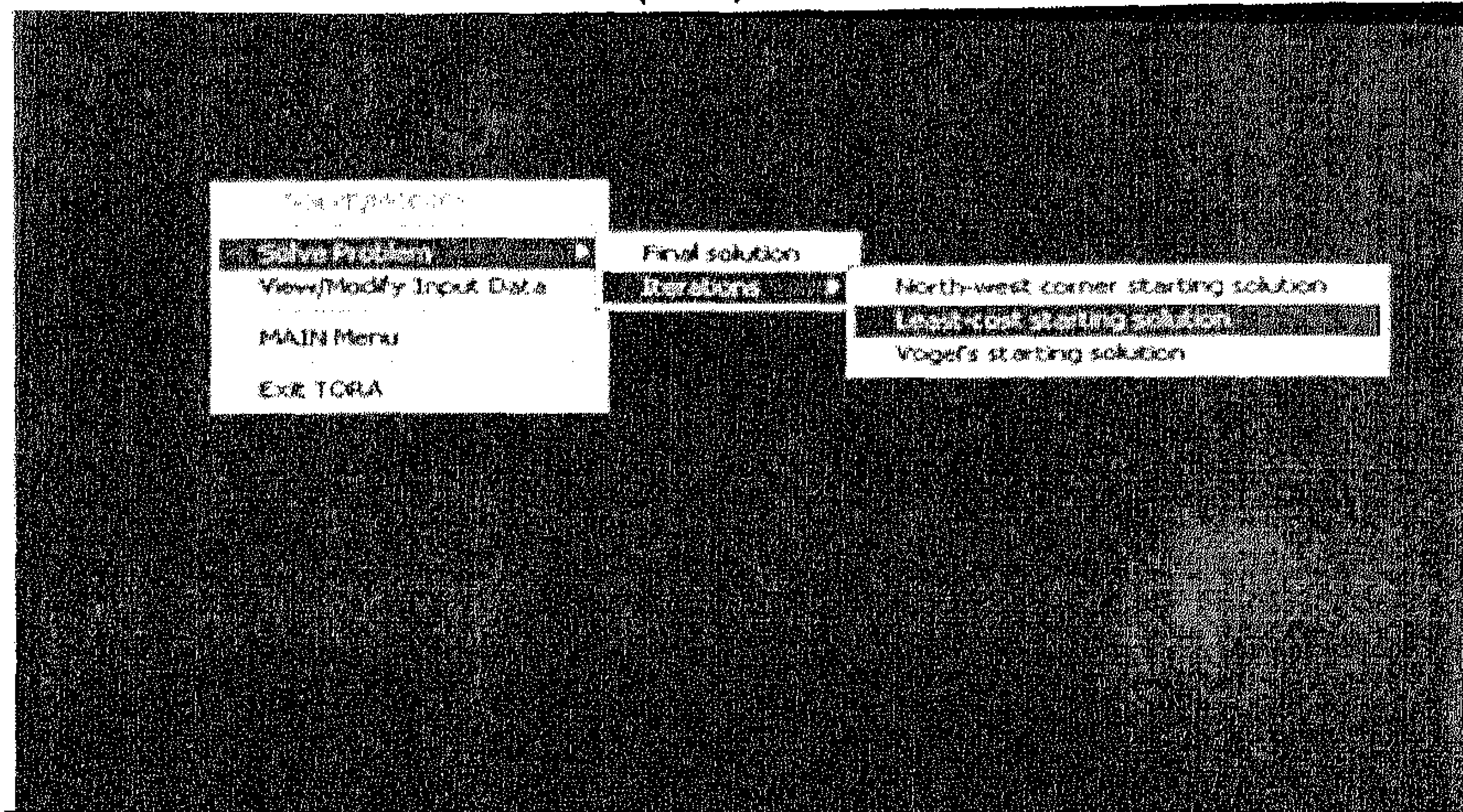
- **North-West Corner Starting Solution.**
- **Least-Cost Starting Solution.**
- **Vogel's Starting Solution.**

٢- فإذا تم اختيار طريقة أقل تكلفة للحل المبدئي Least-Cost Starting Solution كما هو موضح في شكل (٤-٧).

٣- فتظهر النوافذ المتتالية في شكل (٤-٨)-(٤-١٢) التي تعطي الحلول المتتالية Iteration للوصول للحل الأمثل في الجدول الأخير.

كما هو موضح الجداول المتتالية في الأشكال من (٤-٧) إلى شكل (٤-١٢).

شكل (٤-٧)



شكل (٤-٨)

Next Iteration | All Iterations | Write to Printer

Iter 2	ObjVal =	185000.0(	D1	D2	D3	D4	Supply
	Name						
			v1=30.00	v2=50.00	v3=45.00	v4=55.00	
S1			30.00 / 800 / 0.00	50.00 / 400 / 0.00	25.00 / / 20.00	20.00 / / 35.00	1200
S2		u2=-20.00	40.00 / / -30.00	30.00 / 1500 / 0.00	35.00 / / -10.00	60.00 / / -25.00	1500
S3		u3=-5.00	25.00 / 0 / 0.00	75.00 / / -30.00	40.00 / 2000 / 0.00	50.00 / 400 / 0.00	2400
S4		u4=-55.00	60.00 / / -85.00	15.00 / / -20.00	50.00 / / -60.00	0.00 / 1000 / 0.00	1000
	Demand		800	1900	2000	1400	
Iter 3	ObjVal =	175000.0(	D1	D2	D3	D4	Supply
	Name						
			v1=30.00	v2=50.00	v3=45.00	v4=20.00	
S1			30.00 / 400 / 0.00	50.00 / 400 / 0.00	25.00 / / 20.00	20.00 / 400 / 0.00	1200
S2		u2=-20.00	40.00	30.00 / 1500	35.00	60.00	1500

View/Modify Input Data | MAIN Menu | Exit TORA

شكل (٤-٩)

Iter 3	ObjVal = 175000.00	D1	D2	D3	D4	Supply
		v1=30.00	v2=50.00	v3=45.00	v4=20.00	
S1		30.00 / **400** / 0.00	50.00 / **400** / 0.00	25.00 / 20.00	20.00 / **400** / 0.00	1200
S2	u2=-20.00	40.00 / -30.00	30.00 / **1500** / 0.00	35.00 / -10.00	60.00 / -60.00	1500
S3	u3=-5.00	25.00 / **400** / 0.00	75.00 / -30.00	40.00 / **2000** / 0.00	50.00 / -35.00	2400
S4	u4=-20.00	60.00 / -50.00	15.00 / 15.00	50.00 / -25.00	0.00 / **1000** / 0.00	1000
Demand		800	1900	2000	1400	
Iter 4	ObjVal = 167000.00	D1	D2	D3	D4	Supply
		v1=10.00	v2=50.00	v3=25.00	v4=20.00	
S1		30.00 / -20.00	50.00 / **400** / 0.00	25.00 / **400** / 0.00	20.00 / **400** / 0.00	1200
S2	u2=-20.00	40.00	30.00 / **1500**	35.00	60.00	1500

View/Modify Input Data | MAIN Menu | Exit TORA

شكل (٤-١٠)

Iter 4	ObjVal = 167000.00	D1	D2	D3	D4	Supply
		v1=10.00	v2=50.00	v3=25.00	v4=20.00	
S1		30.00 / -20.00	50.00 / **400** / 0.00	25.00 / **400** / 0.00	20.00 / **400** / 0.00	1200
S2	u2=-20.00	40.00 / -50.00	30.00 / **1500** / 0.00	35.00 / -30.00	60.00 / -60.00	1500
S3	u3=-15.00	25.00 / **800** / 0.00	75.00 / -40.00	40.00 / **1600** / 0.00	50.00 / -45.00	2400
S4	u4=-20.00	60.00 / -70.00	15.00 / 15.00	50.00 / -45.00	0.00 / **1000** / 0.00	1000
Demand		800	1900	2000	1400	
Iter 5	ObjVal = 161000.00	D1	D2	D3	D4	Supply
		v1=10.00	v2=35.00	v3=25.00	v4=20.00	
S1		30.00 / -20.00	50.00 / -15.00	25.00 / **400** / 0.00	20.00 / **800** / 0.00	1200
S2	u2=-5.00	40.00	30.00 / **1500**	35.00	60.00	1500

View/Modify Input Data | MAIN Menu | Exit TORA

شكل (٤-١١)

u1=0

Next Iteration | All Iterations | Write to Printer

Iter 4	ObjVal =	167000.00	D1	D2	D3	D4	Supply
	Name						
			v1=10.00	v2=50.00	v3=25.00	v4=20.00	
			30.00	50.00	25.00	20.00	
S1				400	400	400	1200
			-20.00	0.00	0.00	0.00	
			40.00	30.00	35.00	60.00	
S2		u2=-20.00		1500			1500
			-50.00	0.00	-30.00	-60.00	
			25.00	75.00	40.00	50.00	
S3		u3=15.00	800		1600		2400
			0.00	-10.00	0.00	-15.00	
			60.00	15.00	50.00	0.00	
S4		u4=-20.00				1000	1000
			-70.00	15.00	-45.00	0.00	
	Demand		800	1900	2000	1400	
Iter 5	ObjVal =	161000.00	D1	D2	D3	D4	Supply
	Name						
			v1=10.00	v2=35.00	v3=25.00	v4=20.00	
			30.00	50.00	25.00	20.00	
S1					400	800	1200
			-20.00	-15.00	0.00	0.00	
S2		u2=-5.00	40.00	30.00	35.00	60.00	1500
				1500			

View/Modify Input Data | MAIN Menu | Exit TORA

شكل (٤-١٢)

u1=0

Next Iteration | All Iterations | Write to Printer

			25.00	75.00	40.00	50.00	
S3		u3=15.00	800		1600		2400
			0.00	-10.00	0.00	-15.00	
			60.00	15.00	50.00	0.00	
S4		u4=-20.00				1000	1000
			-70.00	15.00	-45.00	0.00	
	Demand		800	1900	2000	1400	
Iter 5	ObjVal =	161000.00	D1	D2	D3	D4	Supply
	Name						
			v1=10.00	v2=35.00	v3=25.00	v4=20.00	
			30.00	50.00	25.00	20.00	
S1					400	800	1200
			-20.00	-15.00	0.00	0.00	
			40.00	30.00	35.00	60.00	
S2		u2=-5.00		1500			1500
			-35.00	0.00	-15.00	-45.00	
			25.00	75.00	40.00	50.00	
S3		u3=15.00	800		1600		2400
			0.00	-25.00	0.00	-15.00	
			60.00	15.00	50.00	0.00	
S4		u4=-20.00		400		600	1000
			-70.00	0.00	-45.00	0.00	
	Demand		800	1900	2000	1400	

View/Modify Input Data | MAIN Menu | Exit TORA

مثال (٤-٨): الجدول التالي يوضح الكميات المتاحة في مصادر الإنتاج Sources كذلك الكميات المطلوبة في مراكز الاستهلاك Destinations وتكلفة نقل الوحدة من مركز الإنتاج i إلى مركز الاستهلاك j.

جدول (٤-٩)

Dest. / Sou.	1	2	3	4	الكميات المطلوبة
1	5	7	9	6	500
2	6	11	8	7	900
3	7	10	9	9	800
4	5	12	9	8	200
5	4	9	7	10	500
6	13	8	10	9	400
7	16	11	12	9	500
8	7	10	11	8	700
9	8	9	12	9	800
10	13	9	14	11	800
11	16	11	13	10	900
12	4	8	10	9	600
13	11	13	11	8	700
14	10	9	10	7	500
15	9	5	11	10	400
الكميات المتاحة	270	3000	2000	1500	9200

باستخدام حزمة TORA يتم إدخال البيانات كما سبق توضيح ذلك في المثال السابق، كما هو موضح بالشكل التالي.

شكل (٤-١٣)

Problem Title: example 4-8
No. of Sources: 4
No. of Dest'ns: 15

Editing Grid:
>>To DELETE, INSERT, COPY, or PASTE a column(row), click heading cell of target column(row), then invoke pull down Edit Grid menu
>>For INSERT mode, a single(double) click of target row/column will place new row/column after(before) target row/column.

INPUT GRID - TRANSPORTATION

	D5	D6	D7	D8	D9	D10	D11	D12	D13	D14	D15	Supply
S1	4.00	13.00	15.00	7.00	8.00	13.00	16.00	4.00	11.00	10.00	9.00	2700
S2	9.00	8.00	11.00	10.00	9.00	9.00	11.00	8.00	13.00	9.00	0.00	3000
S3	7.00	10.00	12.00	11.00	12.00	14.00	13.00	10.00	11.00	10.00	11.00	2000
S4	10.00	9.00	9.00	8.00	9.00	11.00	10.00	9.00	8.00	7.00	10.00	1500
Demand	500	400	500	700	800	800	900	600	700	500	400	

SOLVE Menu　MAIN Menu　Exit TORA

وباختيار الحل النهائي نحصل على الحل النهائي كما هو موضح بالشكل (٤-١٤).

من الشكل يتضح أن الحل الأمثل يتم الحصول عليه بعد 6 تكرارات **Iterations**.

$$C^* = 68900\ ,\ X^*_{11} = 500\ ,\ X^*_{14} = 200\ ,\ X^*_{15} = 500\ ,\ X^*_{19} = 200\ ,$$

$$X^*_{18} = 700\ ,\ X^*_{12} = 600\ ,\ X^*_{24} = 400\ ,\ X^*_{26} = 400\ ,\ X^*_{29} = 600\ ,$$

$$X^*_{210} = 800\ ,\ X^*_{211} = 800\ ,\ X^*_{215} = 400\ ,\ X^*_{32} = 900\ ,\ X^*_{33} = 800\ ,$$

$$X^*_{32} = 200\ ,\ X^*_{311} = 100\ ,\ X^*_{47} = 300\ ,\ X^*_{413} = 700\ ,\ X^*_{414} = 500$$

شكل (٤-١٤)

TRANSPORTATION MODEL OUTPUT SUMMARY

Title: example 4.8
Final Iteration No.: 6
Objective Value (minimum cost) =68900.00

Write to Printer

From	To	Amt Shipped	Obj Coeff	Obj Contrib
S1:	D1:	500	5.00	2500.00
S1:	D4:	200	5.00	1000.00
S1:	D5:	500	4.00	2000.00
S1:	D8:	700	7.00	4900.00
S1:	D9:	200	8.00	1600.00
S1:	D12:	600	4.00	2400.00
S2:	D6:	400	8.00	3200.00
S2:	D9:	600	9.00	5400.00
S2:	D10:	800	9.00	7200.00
S2:	D11:	800	11.00	8800.00
S2:	D15:	400	0.00	0.00
S3:	D2:	900	8.00	7200.00
S3:	D3:	800	9.00	7200.00
S3:	D7:	200	12.00	2400.00
S3:	D11:	100	13.00	1300.00
S4:	D7:	300	9.00	2700.00
S4:	D13:	700	8.00	5600.00
S4:	D14:	500	7.00	3500.00

View/Modify Input Data | MAIN Menu | Exit TORA

(٤-٧) تمرينات Exercises

(٤-١) باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي أوجد حل مبدئي للمشكلة الموضحة بالجدول التالي:

جدول (٤-٢٠)

إلى / من	1	2	3	4	العرض
1	15	9	8	7	2000
2	11	14	13	12	1500
3	6	16	5	4	2000
4	17	18	20	3	2000
الطلب	1500	2000	2500	1500	7500

(٤-٢) أعتبر المشكلة في (٤-١) - أوجد حل مبدئي باستخدام طريقة أقل تكلفة ثم قارن بين الحل في (٤-١) والحل باستخدام طريقة أقل تكلفة.

(٤-٣) أوجد الحل الأمثل للمشكلة في (٤-٢).

(٤-٤) الجدول التالي يوضح تكلفة النقل من المصانع P_1, P_2, P_3 إلى مراكز الاستهلاك H_1, H_2, H_3, H_4 كذلك يوضح الكميات المتوفرة في المصانع والكميات المطلوبة لمراكز الاستهلاك.

١- كون نموذج النقل الذي يمثل المشكلة ثم حوله إلى نموذج متوازن.

٢- أوجد حل مبدئي مناسب.

٣- أوجد الحل الأمثل.

جدول (٤-٢١)

مراكز الاستهلاك / المصانع	H_1	H_2	H_3	H_4	الكميات المتاحة
P_1	2	6	4	12	100
P_2	7	3	10	11	250
P_3	5	8	9	13	300
الكميات المطلوبة	100	150	200	250	650 / 700

(٤-٥) إذا تم إغلاق مركز الاستهلاك H_4.

أ- كون نموذج نقل مناسب للمشكلة بعد غلق المركز H_4.

ب- أوجد حل مبدئي مناسب.

ج- أوجد الحل الأمثل.

د- قارن بين المشكلة في (٤-٤) والمشكلة الحالية.

(٤-٦) الجدول التالي يوضح تكلفة نقل الوحدة (الياردة) الواحدة بالجنية من مراكز إنتاج الغزل (من القطن، البوليستر، الحرير) في ألباهما، هونج كونج، كوريا، نيچيريا، ڤينزويلا إلى مراكز النسيج في لوس أنجلوس، شيكاغو، لندن، المكسيك، مانيلا، روما، طوكيو، نيويورك[1].

[1] Lawrance L. L. (1994): "Quantitative Methods for Business Decisions", Harcourt Brace College Publishers , New York.

جدول (٤-٢٢)

نيويورك	طوكيو	روما	مانيلا	المكسيك	لندن	شيكاغو	لوس أنجلوس	مراكز النسيج / مراكز الغزل
6	42	24	21	18	18	12	12	ألباهما
48	24	54	12	60	48	42	36	هونج كونج
42	6	54	24	66	48	36	30	كوريا
60	30	42	66	54	42	72	84	نيچيريا
24	66	36	54	6	30	18	24	ڤينزويلا

والجدول التالي يوضح احتياجات كل مركز من مراكز النسيج للكميات المطلوبة من القطن، البوليستر، الحرير.

جدول (٤-٢٣)

نيويورك	طوكيو	روما	مانيلا	المكسيك	لندن	شيكاغو	لوس أنجلوس	مراكز النسيج / نوع الغزل
800	300	200	900	900	1000	900	600	القطن
2600	1000	800	500	1600	3100	2100	1100	البوليستر
250	600	150	350	50	200	100	200	الحرير

كذلك الكميات المتاحة من الغزل في مراكز إنتاج الغزل موضحة بالجدول التالي.

جدول (٤-٢٤)

نوع الغزل / مراكز الغزل	القطن	البوليستر	الحرير
ألباهما	1200	2500	0
هونج كونج	1800	3000	1500
كوريا	700	4000	800
نيچيريا	2000	0	0
ڤينزويلا	1100	2500	50

المطلوب:

١- أوجد تكلفة النقل المثلى لنقل كل من:

أ- القطن　　، 　　ب- البوليستر　　، 　　ج- الحرير

٢- إذا زاد إنتاج الغزل من القطن في نيجيريا ليصبح 2500 وحدة، ما هو التكلفة المثلى في هذه الحالة.

٣- إذا زاد إنتاج غزل الحرير في هونج كونج بنسبة 5%، أوجد التكلفة المثلى في هذه الحال.

٤- استخدم الحزم الجاهزة للحصول على الحل الأمثل.

(٤-٧) استخدم الحزم الجاهزة في إيجاد الحل الأمثل للمشكلة التالية:

جدول (٤-٢٥)

إلى / من	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	المتاح
1	2	10	8	8	5	6	6	7	5	3	2	1000
2	20	13	14	5	14	12	21	7	14	11	15	800
3	10	8	8	14	10	10	9	9	14	15	13	1200
4	13	14	13	5	5	9	10	11	14	20	25	500
5	2	6	7	4	4	12	10	4	4	3	2	1500
6	7	15	14	15	18	20	21	11	12	14	12	500
7	9	11	10	10	8	7	7	11	12	18	3	1200
8	11	15	21	11	12	13	14	15	18	19	20	800
المطلوب	200	300	800	700	800	800	200	800	300	400	500	

الباب الخامس

مشكلة التخصيص

The Assignment Problem

(٥-١) تعريف المشكلة — The Problem's Definition

(٥-٢) نموذج التخصيص — Assignment Model

(٥-٣) الخوارزم الهنغاري — Hungarian Algorithm

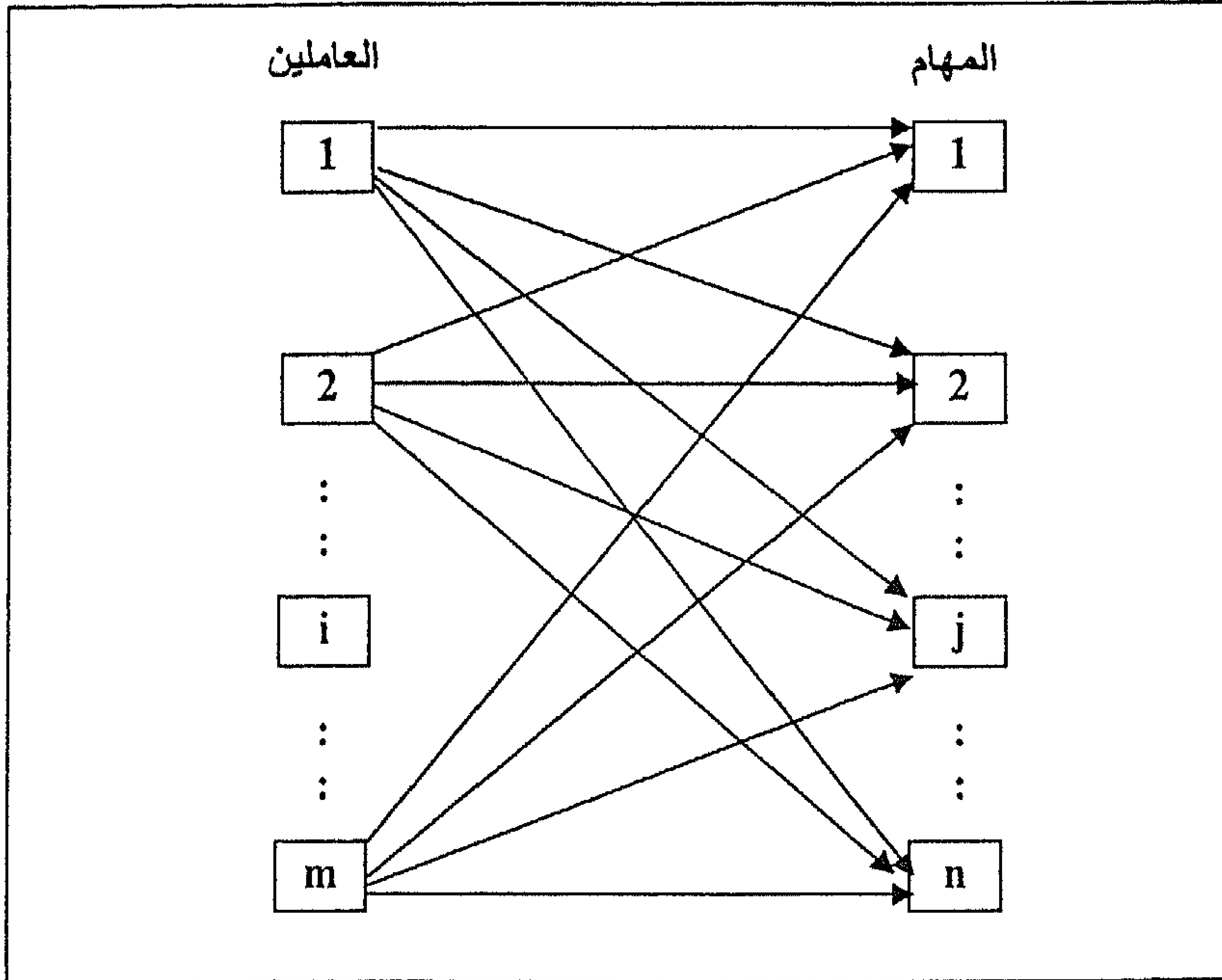
(٥-٤) الحل باستخدام الحاسب (الحزم الجاهزة) — Computer Solution

(٥-٥) تمرينات — Exercises

(٥-١) تعريف المشكلة The Problem's Definition

تتمثل مشكلة التخصيص في وجود عدد n من المهام Jobs المختلفة (ممكن تكون وظائف، أماكن، خدمات، ... الخ) وسوف نرمز للمهمة بالرمز (j) حيث $j = 1,2,...,n$ ، وتؤدى كل مهمة من هذه المهام (j) باستخدام عامل واحد (ممكن يكون موظف، آلة، ... الخ) يؤدى هذه المهمة حيث يوجد عدد m من العمال Workers بحيث يمكن للعامل (i) أن يقوم بتأدية أي وظيفة (j) ولكن ممكن تختلفه التكلفة من وظيفة لأخرى نفس العامل. حيث $i = 1,2,...,m$ كما هو موضح في الشكل التالي:

شكل (٥-١)



وتتلخص مشكلة التخصيص في كيفية توزيع الـــ m عامل على n وظيفة بحيث تكون التكلفة الكلية للإنجاز أقل ما يمكن. وممكن تكون تكلفة إنجاز المهمة تتمثل في زمن الإنجاز أو المخاطرة المترتبة على إنجاز المهمة، ... الخ.

ومن الشكل يتضح أن مشكلة التخصيص تتشابه مع مشكلة النقل السابق تقديمها في الباب السابق، وبالتحديد تعتبر مشكلة التخصيص حالة خاصة من مشكلة النقل كما سوف نوضح في الفصل التالي.

(٥-٢) نموذج التخصيص Assignment Model

إذا فرضنا أن X_{ij} تشير إلى تخصيص العامل (i) للمهمة رقم (j) حيث:

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا أنجز العامل (i) المهمة (j)} \\ 0 & \text{في باقي الحالات الأخرى} \end{cases} \qquad (5.1)$$

ووفقاً لتعريف X_{ij} في (5.1) فإن:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1 \quad , \quad i = 1,2,...,m \qquad (5.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = 1 \quad , \quad j = 1,2,...,n \qquad (5.3)$$

وفي حالة التوازن أي عندما تكون عدد المهام المطلوب إنجازها مساوي لعدد العاملين الذين يقومون بإنجاز هذه المهام – أو بعبارة أخرى عندما:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = n = m$$

وفي حالة عدم التوازن أي عندما $n \neq m$ فإنه في هذه الحالة يمكن التحويل إلى حالة التوازن بإضافة عامل وهمي (أو أكثر) في حالة $m < n$، أو إضافة مهمة (أو أكثر) في حالة $m > n$. وسوف نوضح ذلك من خلال الأمثلة التي سوف تقدم فيما يلي.

فإذا أشرنا إلى تكلفة إنجاز العامل رقم (i) المهمة رقم (j) بالرمز C_{ij}. بالتالي يمكن صياغة مشكلة التخصيص كنموذج برمجة خطية على النحو التالي:

أوجد X_{ij} التي تجعل

$$Min.Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij} \quad (5.4)$$

$$S.T. \quad \sum_{i=1}^{m} X_{ij} = 1 \quad , \quad j = 1,2,....,n \quad (5.5)$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1 \quad , \quad i = 1,2,....,m \quad (5.6)$$

$$X_{ij} = 0 \text{ أو } 1 \quad (5.7)$$

ملحوظة: تكلفة المهمة الوهمية أو العامل الوهمي تساوي صفر.

ونلاحظ أن النموذج (5.7)-(5.4) حالة خاصة من نموذج النقل عندما $S_i = 1$ لجميع قيم $i = 1,2,...,m$ كذلك $D_j = 1$ لجميع قيم j حيث $j = 1,2,...,n$. كذلك تأخذ X_{ij} القيمة 0 أو 1 فقط.

ويتضح أن النموذج (5.7)-(5.4) نموذج برمجة خطية يمكن حله باستخدام أسلوب السمبلكس. ولكن نظراً لخصائص هذا النموذج المذكورة أعلاه فهو يعتبر حالة خاصة من النموذج العام للبرمجة الخطية. لذلك قدمت بعض الخوارزميات لحل هذا النموذج حيث باستخدام هذه الخوارزميات يمكن باستخدامها الوصول للحل الأمثل أسرع من استخدام الطرق المقدمة للنموذج العام السابق تقديمها في الباب الثالث.

وفي هذا الباب سوف نقدم الخوارزم الهنغاري Hungarian Algorithm لحل نموذج التخصيص.

مثال (٥-١): الجدول التالي يوضح التكلفة اليومية للعامل الواحد في كل وظيفة من الوظائف التالية بإحدى البنوك التجارية: محلل نظم، مخطط برامج، منفذ برامج المناظرة فتم اختيار 3 من المتقدمين لهذه الوظائف على النحو الموضح في الجدول.

جدول (٥-١)

منفذ برامج	مخطط برامج	محلل نظم	الوظيفة / رقم المتقدم
400	600	300	1
700	1000	800	2
800	1200	500	3

والمطلوب: صياغة المشكلة كنموذج تخصيص بهدف تصغير التكلفة اليومية للعاملين.

الحل: إذا فرضنا أن X_{ij} تشير إلى تخصيص المتقدم رقم (i) في الوظيفة رقم (j) حيث $i = 1,2,3 ; j = 1,2,3$ وبالتالي فإن:

$$\left.\begin{aligned} X_{11} + X_{12} + X_{13} &= 1 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} &= 1 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} &= 1 \end{aligned}\right\} \text{القيود الخاصة بالمتقدمين}$$

$$\left.\begin{aligned} X_{11} + X_{21} + X_{31} &= 1 \\ X_{12} + X_{22} + X_{22} &= 1 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} &= 1 \end{aligned}\right\} \text{القيود الخاصة بالوظيفة}$$

$X_{ij} = 0$ أو 1

وتكون دالة الهدف على النحو:

$$Min.Z = 300\,X_{11} + 600\,X_{12} + 400\,X_{13} + 500\,X_{21} + 1000\,X_{22} + 700\,X_{23} + 500\,X_{31} + 1200\,X_{32} + 800\,X_{33}$$

وبالتالي يصبح نموذج التخصيص على النحو التالي:

أوجد قيم X_{ij} التي تجعل

$$Min.Z = 300\,X_{11} + 600\,X_{12} + 400\,X_{13} + 500\,X_{21} + 1000\,X_{22} + 700\,X_{23} + 500\,X_{31} + 1200X_{32} + 800\,X_{33}$$

$$S.T. \quad \sum_{j=1}^{3} X_{ij} = 1 \quad , \quad i = 1,2,3$$

$$\sum_{i=1}^{3} X_{ij} = 1 \quad , \quad j = 1,2,3$$

$X_{ij} = 0$ أو 1 , $i = 1,2,3$; $j = 1,2,3$

(٥-٣) الخوارزم الهنغاري Hungarian Algorithm

وفي هذا الفصل سوف نقدم الخوارزم الهنغاري ونوضح خطواته من خلال المثال التالي. إذا اعتبرنا المثال السابق.

الخطوة الأولى: ١- التأكد من أن مصفوفة تكلفة التخصيص مربعة أي أن $n = m$ ، من جدول (٥-١) نجد أن $n = m = 3$

٢- تحديد أصغر عنصر في كل صف كما هو موضح في الجدول التالي.

جدول (٥-٢)

رقم المتقدم \ الوظيفة	محلل نظم	مخطط برامج	منفذ برامج	أقل تكلفة في الصف
1	300	600	400	300
2	800	1000	700	700
3	500	1200	800	500

٣- طرح قيمة أقل عنصر في الصف من كل عنصر من عناصر الصف المناظر لها كما في الجدول التالي.

جدول (٥-٣)

رقم المتقدم \ الوظيفة	محلل نظم	مخطط برامج	منفذ برامج
1	0	300	100
2	100	300	0
3	0	700	300
	0	300	0

٤- نحدد قيمة أقل عنصر في كل عمود في الجدول السابق وطرحها من قيمة كل عنصر من عناصر العمود المناظر لها كما في الجدول التالي:

جدول (٥-٤)

الوظيفة / رقم المتقدم	محلل نظم	مخطط برامج	منفذ برامج
1	0	0 (x_{12})	100
2	100	0	0 (x_{23})
3	0 (x_{31})	400	300

الخطوة الثانية: ١- نغطى جميع الأصفار في مصفوفة التكلفة بالجدول السابق بأقل عدد من الخطوط الأفقية والرأسية بحيث يمر الخط الأفقي على جميع عناصر الصف والخط الرأسي على جميع عناصر العمود كما هو موضح في جدول (٥-٤).

٢- إذا كان عدد الخطوط الرأسية والأفقية يساوى عدد الصفوف (أو عدد الأعمدة) ننتقل إلى الخطوة الرابعة.

٣- إذا كان عدد الخطوط الرأسية والأفقية لا يساوي عدد الصفوف (أو عدد الأعمدة) ننتقل إلى الخطوة الثالثة.

وفي هذا المثال نجد أن عدد الخطوط الرأسية والأفقية تساوي 3 أي تساوي عدد الصفوف أو الأعمدة. لذا ننتقل إلى الخطوة الرابعة.

الخطوة الثالثة: إذا كان عدد الخطوط الرأسية والأفقية أقل من عدد الصفوف (أو الأعمدة) يتم الآتي:

١- نختار العنصر الذي له أقل قيمة من العناصر غير المغطاة بخطوط ولتكن قيمته تساوي θ.

٢- نطرح القيمة θ من جميع العناصر غير المغطاة بخطوط.

٣- نضيف قيمة θ إلى قيمة كل عنصر يقع عند تقاطع خط أفقي مع خط رأسي.

٤- نكرر الخطوة الثانية حتى نحصل على عدد من الخطوط الأفقية والرأسية مساوي لعدد الصفوف (أو الأعمدة).

الخطوة الرابعة: إذا كان عدد الخطوط الأفقية والرأسية يساوي عدد الصفوف (أو الأعمدة) نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل بحيث:

١- نبحث عن الصف (أو العمود) الذي يحتوي على عنصر صفري واحد فيتم تخصيص هذا العنصر بوضعه في مربع كما في جدول (٥-٤).

ملحوظة: ويترتب على ذلك شغل الصف والعمود المناظر لهذا العنصر ففي هذا المثال يتم تخصيص المتقدم 2 في الوظيفة 3 (ويترتب على ذلك أن تبقى الوظيفة الأولى والثانية فقط ليتم شغلها من المتقدم الأول والثالث).

٢- نكرر (١) حتى نأتي على جميع الصفوف والأعمدة بحيث نكون خصصنا في كل صف وكل عمود صفراً وأحد كما هو موضح في الجدول السابق.

ملحوظة: في حالة عدم إمكانية تخصيص في كل صف وكل عمود صفراً وحيداً، عندئذ نكرر الخطوة الثالثة.

ومن الجدول السابق نجد أن:

$$X_{12} = 1 \ , \ X_{23} = 1 \ , \ X_{31} = 1$$

وتكون أقل تكلفة في هذه الحالة تساوي C حيث:

$$C = 600(1) + 700(1) + 500(1) = 1800 \text{ جنيه}$$

مثال (٥-٢): الجدول التالي يعطي زمن إنجاز العامل (i) للمهمة (j) بالساعات.

جدول (٥-٦)

i \ j	1	2	3	4	أقل قيمة في عناصر الصف
1	11	14	16	13	11
2	19	17	20	19	17
3	14	15	21	17	14
4	18	17	18	15	15

حدد العامل (i) للمهمة (j) بحيث يكون الزمن الكلي للإنجاز أقل ما يمكن.

١- نحدد قيمة أقل عنصر في كل صف، ثم نقوم بطرح هذه القيمة من عناصر الصف المناظر لها، كما هو موضح في الجدول التالي:

جدول (٥-٧)

i \ j	1	2	3	4
1	0	3	5	2
2	2	0	3	2
3	0	1	7	3
4	3	2	3	0
	0	0	3	0

٢- نحدد قيمة أقل عنصر في كل عمود في المصفوفة بجدول (٥-٧) ثم نقوم بطرح القيمة من عناصر العمود المناظر لها، كما هو موضح بجدول (٥-٨).

جدول (٥-٨)

i \ j	1	2	3	4
1	0	3	2	2
2	2	0	0	2
3	0	1	4	3
4	3	2	0	0

٣- من الجدول السابق نجد أن عدد الخطوط الرأسية والأفقية يساوي 3، أي أقل من عدد الصفوف 4 لذلك ننتقل إلى الخطوة التالية.

٤- بالنسبة للعناصر غير المغطاة (بالخطوط) نجد أن أقل قيمة تساوي (1) في العنصر بالصف الثالث العمود الثاني.

بطرح القيمة (1) من جميع العناصر غير المغطاة وإضافته لقيمة العناصر الناتجة عن تقاطع الخطوط الرأسية بالأفقية نحصل على الجدول التالي:

جدول (٥-٩)

i \ j	1	2	3	4
1	$0(x_{11})$	2	1	1
2	3	0	$0(x_{23})$	2
3	0	$0(x_{32})$	5	2
4	4	2	0	$0(x_{44})$

من الجدول يتضح أن عدد الخطوط الأفقية والرأسية تساوي 4 أي يساوي عدد الصفوف

٥- من الجدول نجد أن العمود 4 يحتوى على صفر واحد مناظر لـــ $i = 4$ بالتالي يتم تخصيص العامل رقم (4) للمهمة (4) أي $X_{44} = 1$.

بالمثل نجد أن:

$$X_{11} = 1 \text{ ، } X_{23} = 1 \text{ ، } X_{32} = 1$$

وتكون التكلفة في هذه الحال:

$$C = 11(1) + 20(1) + 15(1) + 15(1) = 61 \text{ ساعة}$$

(٥-٤) الحل باستخدام الحاسب (الحزم الجاهزة)

Computer Solution

وكما ذكرنا سابقاً أن مشكلة التخصص هي حالة خاصة من مشكلة النقل، وبالتالي ممكن استخدام نماذج النقل Transportation Model في حزمة الـ TORA لحل مشكلة التخصيص. كما سوف نوضح خلال الأمثلة التالية.

مثال (٥-٣): الجدول التالي يوضح التكلفة اليومية للعامل رقم (i) في الوظيفة رقم (j)

جدول (٥-١٠)

i \ j	1	2	3	4	5	المتاح
1	20	15	30	70	40	1
2	25	10	40	50	55	1
3	30	20	35	45	70	1
4	45	25	45	60	55	1
5	40	15	50	65	80	1
المطلوب	1	1	1	1	1	

باستخدام حزمة TORA أوجد حل المشكلة أعلاه.

الحل: ١- بالرجوع إلى الباب السابق [فصل (٣-٧)] فمن القائمة الرئيسية لـ TORA يتم اختيار Transportation Model ثم يتم إدخال البيانات كما هو موضح في الشكل التالي.

شكل (٥-١)

Problem Title: example 5-3
No. of Sources: 5
No. of Dest'ns: 5

Editing Grid:
>>To DELETE, INSERT, COPY, or PASTE a column(row), click heading cell of target column(row), then invoke pull-down EditGrid menu
>>For INSERT mode, a single(double) click of target row/column will place new row/column after(before) target row/column.

INPUT GRID - TRANSPORTATION

		D1	D2	D3	D4	D5	Supply
	S/D Name						
S1		20.00	15.00	30.00	70.00	40.00	1
S2		25.00	10.00	40.00	50.00	55.00	1
S3		30.00	20.00	35.00	45.00	70.00	1
S4		45.00	25.00	45.00	60.00	55.00	1
S5		40.00	15.00	50.00	65.00	80.00	1
Demand		1	1	1	1	1	

SOLVE Menu | MAIN Menu | Exit TORA

٢- يتم الحصول على الحل باختيار **Final Solution** فنحصل على الحل النهائي كما في الشكل التالي.

ومن الشكل نجد أن القيم المثلى لدالة الهدف للمتغيرات الأساسية على النحو التالي.

$$C = 170.00\ ,\ X_{13} = 1\ ,\ X_{15} = 0\ ,\ X_{21} = 1\ ,\ X_{34} = 1\ ,$$
$$X_{45} = 1\ ,\ X_{51} = 0\ ,\ X_{52} = 1\ ,\ X_{53} = 0\ ,\ X_{54} = 0$$

شكل (٥-٢)

TRANSPORTATION MODEL OUTPUT SUMMARY

Title: example 5-3
Final Iteration No.: 8
Objective Value (minimum cost) =170.00

Write to Printer

From	To	Amt Shipped	Obj Coeff	Obj Contrib
S1:	D3:	1	30.00	30.00
S1:	D5:	0	40.00	0.00
S2:	D1:	1	25.00	25.00
S3:	D4:	1	45.00	45.00
S4:	D5:	1	55.00	55.00
S5:	D1:	0	40.00	0.00
S5:	D2:	1	15.00	15.00
S5:	D3:	0	50.00	0.00
S5:	D4:	0	65.00	0.00

View/Modify Input Data | MAIN Menu | Exit TORA

مثال (٥-٤): الجدول التالي يوضح الوقت (بالساعات) الممكن أن يأخذه العامل (i) في إنجاز المهمة (j). والمطلوب تخصيص عامل لكل مهمة بحيث يكون الوقت الإجمالي أقل ما يمكن.

وباستخدام حزمة TORA أوجد حل المشكلة أعلاه.

جدول (٥-١١)

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	المتاح
1	5	7	0.01	3	10	5	12	1
2	4	6	8.5	3.5	9	6	10	1
3	4.5	6.5	9	4	8.5	7.5	12	1
4	3	5.5	8	5.5	9.5	7	10	1
5	5	8	9.5	3	10	5	12	1
6	3.5	7	8	5	9	6	11	1
7	4	9	10	4	8	8	10	1
المطلوب	1	1	1	1	1	1	1	

الحل: ١- من القائمة الرئيسية لحزمة TORA يتم اختيار Transportation Model ثم يتم إدخال بيانات المشكلة كما هو موضح بالشكل التالي.

شكل (٥-٣)

Problem Title: example 5 -4

No. of Sources: 7

No. of Dest'ns: 7

INPUT GRID - TRANSPORTATION

		D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	Supply
	S.D Name								
S1		5.00	7.00	0.01	3.00	10.00	5.00	12.00	1
S2		4.00	6.00	8.50	3.50	9.00	6.00	10.00	1
S3		4.50	6.50	9.00	4.00	8.50	7.50	12.00	1
S4		3.00	5.50	8.00	5.50	9.50	7.00	10.00	1
S5		5.00	8.00	9.50	3.00	10.00	5.00	12.00	1
S6		3.50	7.00	8.00	5.00	9.00	6.00	11.00	0
S7		4.00	9.00	10.00	4.00	8.00	8.00	10.00	1
Demand		1	1	1	1	1	1	1	

SOLVE Menu MAIN Menu Exit TORA

٢- يتم الحصول على الحل باختيار **Final Solution** فنحصل على الحل النهائي كما هو موضح في الشكل التالي.

شكل (٥-٤)

TRANSPORTATION MODEL OUTPUT SUMMARY

Title: example 5-4
Final Iteration No.: 8
Objective Value (minimum cost) =26.01

Next Iteration | All Iterations | Write to Printer

From	To	Amt Shipped	Obj Coeff	Obj Contr
S1:	D3:	1	0.01	0.01
S2:	D2:	1	6.00	6.00
S2:	D6:	0	6.00	0.00
S3:	D2:	0	8.50	0.00
S3:	D3:	0	9.00	0.00
S3:	D4:	1	4.00	4.00
S3:	D5:	0	8.50	0.00
S4:	D1:	1	3.00	3.00
S4:	D2:	0	5.50	0.00
S5:	D6:	1	5.00	5.00
S6:	D3:	0	8.00	0.00
S7:	D5:	1	8.00	8.00
S7:	D7:	0	10.00	0.00
S8: DummyS	D7:	1	0.00	0.00

View/Modify Input Data | MAIN Menu | Exit TORA

من الشكل يتضح أن قيمة دالة الهدف والمتغيرات الأساسية على النحو التالي.

$$C = 26.01\ ,\ X_{13} = 1\ ,\ X_{22} = 1\ ,\ X_{26} = 0\ ,\ X_{32} = 0\ ,$$

$$X_{33} = 0\ ,\ X_{34} = 1\ ,\ X_{35} = 0\ ,\ X_{41} = 1\ ,\ X_{42} = 0$$

$$X_{56} = 1\ ,\ X_{63} = 0\ ,\ X_{75} = 1\ ,\ X_{77} = 0$$

(٥-٥) تمرينات Exercises

(٥-١) الجدول التالي يوضح تكلفة العامل اليومية لشغل أحد الوظائف W_1, W_2, W_3, W_4 . والمطلوب تخصيص عامل لكل وظيفة بحيث تكون التكلفة أقل ما يمكن.

جدول (٥-١٢)

الوظيفة / رقم العامل	W_1	W_2	W_3	W_4
1	5	10	12	7
2	6	13	8	16
3	9	8	14	15
4	19	11	18	17

(٥-٢) اعتبر جدول التكلفة السابق، حل مشكلة التخصيص السابقة باستخدام طرق حل مشكلة النقل. ثم قارن الحل في هذه الحالة بالحل في (٥-١).

(٥-٣) الجدول التالي يوضح تكلفة نقل البرامج $P_1, P_2, ..., P_7$ عبر القنوات الفضائية $C_1, C_2, ..., C_8$ (بالآلف جنيه) بحيث يخصص برنامج واحد للقناة الواحدة.

١- كون نموذج بحيث يهدف إلى تخصيص برنامج لكل قناة بحيث تكون التكلفة أقل ما يمكن.

٢- حل النموذج باستخدام الحاسب كنموذج تخصيص.

٣- حل النموذج باستخدام الحاسب كنموذج نقل.

جدول (٥-١٣)

البرنامج \ القناة	1	2	3	4	5	6	7	8
P_1	71	88	52	75	65	100	110	98
P_2	45	93	66	59	73	105	119	101
P_3	91	58	70	93	88	83	120	106
P_4	93	49	55	58	92	99	112	107
P_5	69	67	84	74	76	102	103	111
P_6	72	56	69	54	68	104	109	115
P_7	52	70	36	62	77	105	122	113

(٥-٤) أعلنت أحدى الشركات عن وجود 3 وظائف خالية فتقدم لهذه الوظائف 4 أشخاص، ممكن أن يؤدي كل منهم هذه الوظائف. والجدول التالي يوضح الأجر الشهري بالجنيه للأشخاص المتقدمين لكل وظيفة.

جدول (٥-١٤)

رقم العامل \ الوظيفة	1	2	3
1	1000	820	1500
2	1200	800	1200
3	1100	730	780
4	750	620	690

خصص لكل وظيفة أحد المتقدمين بحيث يكون إجمالي الأجور الشهرية أقل ما يمكن.

(٥-٥) الجدول التالي يوضح تكلفة تخصيص العامل (i) للوظيفة (j).

جدول (٥-١٥)

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	50	95	189	218	21	142	200	64	200	40	15
2	22	217	50	143	175	100	141	210	60	200	190
3	77	203	70	94	25	75	70	190	20	5	200
4	14	144	170	75	211	75	118	93	120	215	310
5	150	230	211	171	315	205	93	212	310	201	35
6	89	100	31	173	214	99	118	27	213	190	197
7	200	85	148	198	34	161	120	200	190	30	26
8	175	140	200	75	80	180	45	120	75	211	201
9	97	88	101	118	76	152	33	150	119	41	115
10	147	230	320	201	200	140	88	33	20	45	200
11	216	115	205	205	613	301	19	401	113	115	31
12	240	235	211	319	521	55	76	207	22	25	25
13	125	216	310	400	100	113	301	115	118	113	75

١- استخدم الحاسب لإيجاد الحل الأمثل للمشكلة كمشكلة تخصيص.

٢- استخدم الحاسب لإيجاد الحل الأمثل للمشكلة كمشكلة نقل.

الباب السادس

المشكلة الثنائية وتحليل الحساسية

The Dual Problem and Sensitivity Analysis

(٦-١) تعريف المشكلة الثنائية

Definition of the Dual Problem

(٦-٢) الحل الأمثل للمشكلة الثنائية في جدول السمبلكس للمشكلة الأصلية

The Optimal Dual Solution in Simplex Tableau of Primal Problem

(٦-٣) العلاقة بين المشكلتين الأصلية والثنائية

Relationship between Primal & Dual Problems

(٦-٤) التفسير الاقتصادي للمتغيرات الثنائية

Economic Interpretation of the Dual Variables

(٦-٥) تحليل الحساسية — **Sensitivity Analysis**

(٦-٦) تمرينات — **Exercises**

(٦-١) تعريف المشكلة الثنائية

Definition of the Dual Problem

في الأبواب السابقة تناولنا بشيء من التفصيل المشاكل التي يمكن صياغتها كنماذج برمجة خطية وأهم الطرق المتاحة للحل وكيفية تطبيقها.

ولكل مشكلة برمجة خطية مشكلة برمجة خطية أخرى تناظرها، وتسمى مشكلة البرمجة الخطية الأولى بالمشكلة الأصلية **Primal Problem** وتسمى المشكلة الخطية الأخرى المناظرة بالمشكلة الثنائية (أو البديلة) **Dual Problem**. ومن المشكلة الأصلية يمكن اشتقاق المشكلة الثنائية، كذلك من حل المشكلة الأصلية يمكن الحصول مباشرةً على حل المشكلة الثنائية والعكس صحيح كما سوف نوضح ذلك من خلال الأمثلة التالية. حيث توجد علاقة وثيقة بين المشكلة الأصلية والمشكلة الثنائية.

وفي هذا الباب سوف نتناول بالتفصيل دراسة المشكلة الثنائية وخصائصها وعلاقتها بالمشكلة الأصلية. وترجع أهمية دراسة المشكلة الثنائية للآتي:-

١ - أهمية التفسير الاقتصادي لمتغيرات المشكلة الثنائية بالنسبة للمشكلة الأصلية.

٢ - عن طريق المشكلة الثنائية يمكن دراسة تأثير التغيرات في معلمات نموذج البرمجة للمشكلة الأصلية على الحل الأمثل، أو التغيير في قيود المشكلة على الحل الأمثل وهو ما يسمى بتحليل الحساسية **Sensitivity Analysis** كما سوف نوضح ذلك في هذا الباب.

٣- باستخدام المشكلة الثنائية يمكن دراسة أسلوب البرمجة الخطية العكسية Inverse Linear Programming والتي تعتبر من أهم أساليب البرمجة والتي سوف نتناولها بالتفصيل في الباب التالي.

ومن ثم فإن دراسة المشكلة الثنائية يتيح لمتخذ القرار الحصول على معلومات إضافية في ظل حدوث تغييرات في معلمات المشكلة أو القيود الهيكلية وتأثير ذلك التغيير على الحل الأمثل. وفي هذا الفصل سوف نعرف المشكلة الثنائية وكيفية اشتقاقها من المشكلة الأصلية.

من الباب الثاني نجد أن نموذج البرمجة الخطية في الصياغة المتعارف عليها Canonical Form على النحو:

$$Max.Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \qquad (6.1)$$

$$S.T. \quad \sum a_{ij} X_j \le b_i \quad , \quad i = 1,2,...,m \qquad (6.2)$$

$$X_j \ge 0 \qquad (6.3)$$

أو

$$Min.Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \qquad (6.4)$$

$$S.T. \quad \sum a_{ij} X_j \ge b_i \quad , \quad i = 1,2,...,m \qquad (6.5)$$

$$X_j \ge 0 \qquad (6.6)$$

ملحوظة: ليس ضروري في هذه الصياغة أن تكون المقادير b_i غير سالبة - أي ممكن أن تكون قيم حقيقية لجميع قيم $i = 1,2,...,m$.

ويمكن كتابة المشكلة أيضاً في الصياغة المعيارية Standard Form على النحو التالي:

$$Max.Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \qquad (6.7)$$

$$S.T. \quad \sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} X_j = b_i \quad , \quad i = 1,2,...,m \qquad (6.8)$$

$$X_j \geq 0 \quad j = 1,2,...,n, n+1,...,n+m^{\backslash} \qquad (6.9)$$

أو:

$$Min.Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \qquad (6.10)$$

$$S.T. \quad \sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} X_j = b_i \quad , \quad i = 1,2,... \qquad (6.11)$$

$$X_j \geq 0 \quad j = 1,2,...,n, n+1,...,n+m^{\backslash} \qquad (6.12)$$

حيث $m^{\backslash} \leq m$ وتمثل المتغيرات X_j، $j = n+1, n+2, ..., n+m^{\backslash}$ متغيرات مكملة. وفي هذه الحالة لأبد أن تكون جميع قيم b_i، $i = 1,2,...,m$ قيم غير سالبة.

ومشكلة البرمجة في (6.9)-(6.7) أو (6.12)-(6.10) تسمى بالمشكلة الأصلية أيضاً ويناظر المشكلة الأصلية مشكلة أخرى مرتبطة بها تسمى بالمشكلة الثنائية (أو البديلة). حيث يمكن اشتقاق المشكلة الثنائية من المشكلة الأصلية على النحو التالي:

أولاً: إذا كانت المشكلة الأصلية على النحو:

$$\left.\begin{aligned} & Max.Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \\ & S.T. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le b_i \quad , \quad i = 1,2,...,m \\ & X_j \ge 0 \end{aligned}\right\} \quad (6.13)$$

فإن المشكلة الثنائية المناظرة لها تكون على النحو:

$$\left.\begin{aligned} & Min.Y = \sum_{i=1}^{m} b_i Y_i \\ & S.T. \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} Y_i \ge C_j \quad , \quad j = 1,2,...,n \\ & Y_i \ge 0 \end{aligned}\right\} \quad (6.14)$$

والعكس صحيح إذا كانت المشكلة الأصلية على النحو:

$$\left.\begin{aligned} & Min.Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \\ & S.T. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \ge b_i \quad , \quad i = 1,2,...,m \\ & X_j \ge 0 \end{aligned}\right\} \quad (6.15)$$

فإن المشكلة الثنائية المناظرة لها تكون على النحو:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Max.}\,Y = \sum_{i=1}^{m} b_i \; Y_i \\ &\text{S.T.} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\; Y_i \le C_j \quad , \quad j = 1,2,\ldots,n \\ &\qquad\quad Y_i \ge 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6.16)$$

ومما سبق يمكن إيجاد المشكلة الثنائية من المشكلة الأصلية بإتباع الخطوات التالية:

(١) إذا كان الهدف في المشكلة الأصلية تعظيم كما في النموذج (6.3)-(6.1) أو النموذج (6.9)-(6.7) فيكون الهدف في المشكلة الثنائية تصغير كما في النموذج (6.5)-(6.4) أو (6.12)-(6.10) والعكس صحيح، حيث تكون جميع القيود الهيكلية في المشكلة الثنائية فيها الطرف الأيسر أكبر من أو يساوي الطرف الأيمن، والعكس صحيح أي إذا كان الهدف في المشكلة الأصلية تصغير فإنه يكون في المشكلة الثنائية تعظيم.

(٢) المتغيرات في المشكلة الأصلية (قرارية + مكملة) وعددها يساوي $(n+m^{\backslash})$ يناظرها في المشكلة الثنائية القيود الهيكلية، أي يناظر كل متغير قيد.

(٣) يناظر كل قيد هيكلي في المشكلة الأصلية وعددها يساوي (m) متغير في المشكلة الثنائية.

ومن (٢) ، (٣) يتضح أن حجم المشكلة الأصلية $m \times (n + m^{\backslash})$ ولكن حجم المشكلة الثنائية يصبح $(n + m^{\backslash}) \times m$.

(٤) معاملات المتغير في المشكلة الأصلية في الطرف الأيسر لجميع القيود الهيكلية تمثل معاملات المتغيرات الثنائية في القيد المناظر لهذا المتغير في المشكلة الأصلية.

(٥) معاملات المتغيرات القرارية في دالة الهدف في المشكلة الأصلية تمثل قيم الطرف الأيمن للقيود في المشكلة الثنائية.

(٦) المقادير في الطرف الأيمن للقيود الهيكلية في المشكلة الأصلية تمثل معاملات للمتغيرات في دالة الهدف للمشكلة الثنائية.

(٧) المتغيرات القرارية في المشكلة الأصلية متغيرات غير سالبة، والمتغيرات في المشكلة الثنائية متغيرات غير سالبة أيضاً.

ثانياً: إذا كانت المشكلة الأصلية في شكل الصياغة المعيارية على النحو التالي:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Max.}Z = \sum_{j=1}^{n+m^{١}} C_j X_j \\ &\text{S.T.} \quad \sum_{j=1}^{n+m^{١}} a_{ij} X_j = b_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots,m \\ &X_j \geq 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6.17)$$

فإن المشكلة الثنائية المناظرة لها تكون على النحو التالي:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\text{Min.} Y = \sum_{i=1}^{m} b_i\, Y_i \\
&\text{S.T.} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, Y_i \ge C_j \quad , \quad j = 1,2,\dots,n+m^{\backprime} \\
&\qquad Y_i \quad \text{متغيرات حقيقية}
\end{aligned}
\right\} \quad (6.18)
$$

كذلك إذا كانت المشكلة الأصلية:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\text{Min.} Z = \sum_{j=1}^{n+m^{\backprime}} C_j\, X_j \\
&\text{S.T.} \quad \sum_{j=1}^{n+m^{\backprime}} a_{ij}\, X_j = b_i \quad , \quad i = 1,2,\dots,m \\
&\qquad X_j \ge 0
\end{aligned}
\right\} \quad (6.19)
$$

فإن المشكلة الثنائية المناظرة لها تكون على النحو:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\text{Max.} Y = \sum_{i=1}^{m} b_i\, Y_i \\
&\text{S.T.} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, Y_i \le C_j \quad , \quad j = 1,2,\dots,n+m^{\backprime} \\
&\qquad Y_i \quad \text{متغيرات حقيقية}
\end{aligned}
\right\} \quad (6.20)
$$

وفيما يلي سوف نوضح أهم مكونات المشكلة الأصلية والمكونات المناظرة لها في المشكلة الثنائية في الجدولين التاليين.

جدول (٦-١)

المشكلة الثنائية			المشكلة الأصلية		
المتغيرات	القيود	الهدف	المتغيرات	القيود	الهدف
متغيرات حقيقية y_i	$\geq$	تصغير (Min.)	$X_j \geq 0$	$\leq$	تعظيم (Max.)
متغيرات حقيقية y_i	$\leq$	تعظيم (Max.)	$X_j \geq 0$	$\geq$	تصغير (Min.)

جدول (٦-٢)

متغيرات المشكلة الثنائية ↓		x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	…	x_{n+m}	الطرف الأيمن في المشكلة الثنائية ←
		c_1	c_2	…	c_j	c_n	…	c_{n+m}	
$\leftarrow y_1$	b_1	a_{11}	a_{12}		a_{1j}			$a_{1\,m+1}$	
$\leftarrow y_2$	b_2	a_{21}	a_{22}		a_{2j}			$a_{2\,m+2}$	
:	:	:	:		:			:	
:	:	a_{i1}	a_{i2}		a_{ij}			:	
:	:	:	:		:			:	
$\leftarrow y_m$	b_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mj}			a_{m+m}	

↑ معاملات المتغيرات في دالة الهدف للمشكلة الثنائية

↑ معاملات المتغيرات الثنائية في القيد رقم (j) في المشكلة الثنائية

وسوف نوضح ذلك في الأمثلة التالية:

مثال (٦-١): أعتبر مشكلة البرمجة الخطية التالية:

$$\begin{aligned} Max.Z &= 5X_1 + 10X_2 \\ S.T. \quad 7X_1 + 4X_2 &\le 2800 \\ 5X_1 + 8X_2 &\le 250 \\ X_1, X_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

بما أن المشكلة في الصياغة المتعارف عليها بالتالي تصبح المشكلة الثنائية علـى النحو التالي:

$$\begin{aligned} Min.Y &= 2800Y_1 + 250Y_2 \\ S.T. \quad 7Y_1 + 5Y_2 &\ge 5 \\ 4Y_1 + 8Y_2 &\ge 10 \\ Y_1 &\ge 0 \\ Y_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

مثال (٦-٢): أعتبر نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\begin{aligned} Min.Z &= 4X_1 + 2X_2 && (1) \\ S.T. \quad 2X_1 + 7X_2 &\ge 10 && (2) \\ 3X_1 - X_2 &\ge 4 && (3) \\ X_1 + 8X_2 &\ge 17 && (4) \\ 7X_1 + 3X_2 &= 11 && (5) \\ X_1, X_2 &\ge 0 && (6) \end{aligned}$$

المطلوب: ١- ضع مشكلة البرمجة أعلاه في الصياغة المتعارف عليها.

٢- ضع المشكلة في الصياغة المعيارية.

٣- كون المشكلة الثنائية للمشكلة الأصلية.

٤- قارن بين المشكلة الأصلية والمشكلة الثنائية من حيث حجم المشكلة.

الحل: ١- لوضع المشكلة (6)-(1) في الصياغة المتعارف عليها لابد من تحويل القيد (5) إلى متباينتين على النحو التالي:

$$7X_1 + 3X_2 \geq 11 \quad , \quad 7X_1 + 3X_2 \leq 11$$

ويمكن تحويل المتباينة:

$$7X_1 + 3X_2 \leq 11$$

إلى أخرى مكافئة لها على النحو التالي:

$$-7X_1 - 3X_2 \geq -11$$

وبالتالي تصبح المشكلة الأصلية في الصياغة المتعارف عليها على النحو:

$$\begin{aligned}
\text{Min.}Z &= 4X_1 + 2X_2 \\
\text{S.T.} \quad & 2X_1 + 7X_2 \geq 10 \\
& 3X_1 - X_2 \geq 4 \\
& X_1 + 8X_2 \geq 17 \\
& 7X_1 + 3X_2 \geq 11 \\
& -7X_1 - 3X_2 \geq -11 \\
& X_1 , X_2 \geq 0
\end{aligned}$$

٢- وبإضافة المتغيرات المكملة (بالسالب) في القيود الهيكلية نحصل على المشكلة في الصياغة المعيارية على النحو:

$$\text{Min.}Z = 4X_1 + 2X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 + 0X_7$$

$$\begin{aligned} \text{S.T.} \quad 2X_1 + 7X_2 - X_3 &= 10 \longleftarrow Y_1 \\ 3X_1 - X_2 - X_4 &= 4 \longleftarrow Y_2 \\ X_1 + 8X_2 - X_5 &= 17 \longleftarrow Y_3 \\ 7X_1 + 3X_2 - X_6 &= 11 \longleftarrow Y_4^+ \\ -7X_1 - 3X_2 - X_7 &= -11 \longleftarrow Y_4^- \end{aligned}$$

٣- المشكلة الثنائية:

$$\text{Max.}Y = 10Y_1 + 4Y_2 + 17Y_3 + 11Y_4^+ - 11Y_4^- \qquad (7)$$

$$\text{S.T.} \quad 2Y_1 + 3Y_2 + Y_3 + 7Y_4^+ - 7Y_4^- \le 4 \qquad (8)$$

$$7Y_1 - Y_2 + 8Y_3 + 3Y_4^+ - Y_4^- \le 2 \qquad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} -Y_1 \le 0 &\longrightarrow Y_1 \ge 0 \\ -Y_2 \le 0 &\longrightarrow Y_2 \ge 0 \\ -Y_3 \le 0 &\longrightarrow Y_3 \ge 0 \\ -Y_4^+ \le 0 &\longrightarrow Y_4^+ \ge 0 \\ -Y_4^- \le 0 &\longrightarrow Y_4^- \ge 0 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

أو إذا فرضنا أن:

$$Y_4 = Y_4^+ - Y_4^-$$

فإن:

$$\text{Max.} Y = 10\, Y_1 + 4\, Y_2 + 17\, Y_3 + 11\, Y_4$$

$$\text{S.T.} \quad 2\, Y_1 + 3\, Y_2 + Y_3 + 7\, Y_4 \le 4$$

$$7\, Y_1 - Y_2 + 8\, Y_3 + 3\, Y_4 \le 2$$

$Y_1\, ,\ Y_2\, ,\ Y_3 \ge 0 \quad ,\ Y_4$ متغير حقيقي

٤- بمقارنة المشكلة الأصلية في (6)-(1) والمشكلة الثنائية في (10)-(7) نجد أن:

حجم المشكلة الأصلية (2×4) وحجم المشكلة الثنائية (5×2)

(٦-٢) الحل الأمثل للمشكلة الثنائية في جدول السمبلكس للمشكلة الأصلية

The Optimal Dual Solution in Simplex Tableau of Primal Problem

في هذا الفصل سوف نوضح أنه يمكن الحصول على الحل الأمثل للمشكلة الثنائية من جدول السمبلكس الأخير لحل المشكلة الأصلية من خلال المثال التالي ثم نقدم في الفصل التالي العلاقة بين المشكلة الأصلية والثنائية.

مثال (٦-٣): أعتبر مشكلة البرمجة التالية:

$$Max.Z = 5X_1 + 2X_2 \quad (1)$$

$$S.T. \quad X_1 + X_2 \le 10 \quad (2)$$

$$X_1 \le 5 \quad (3)$$

$$X_1, X_2 \ge 0 \quad (4)$$

١- أرسم منطقة الحلول الممكنة ثم وضح من الرسم الحل الأمثل للمشكلة.

٢- أوجد الحل الأمثل للمشكلة باستخدام جداول السمبلكس.

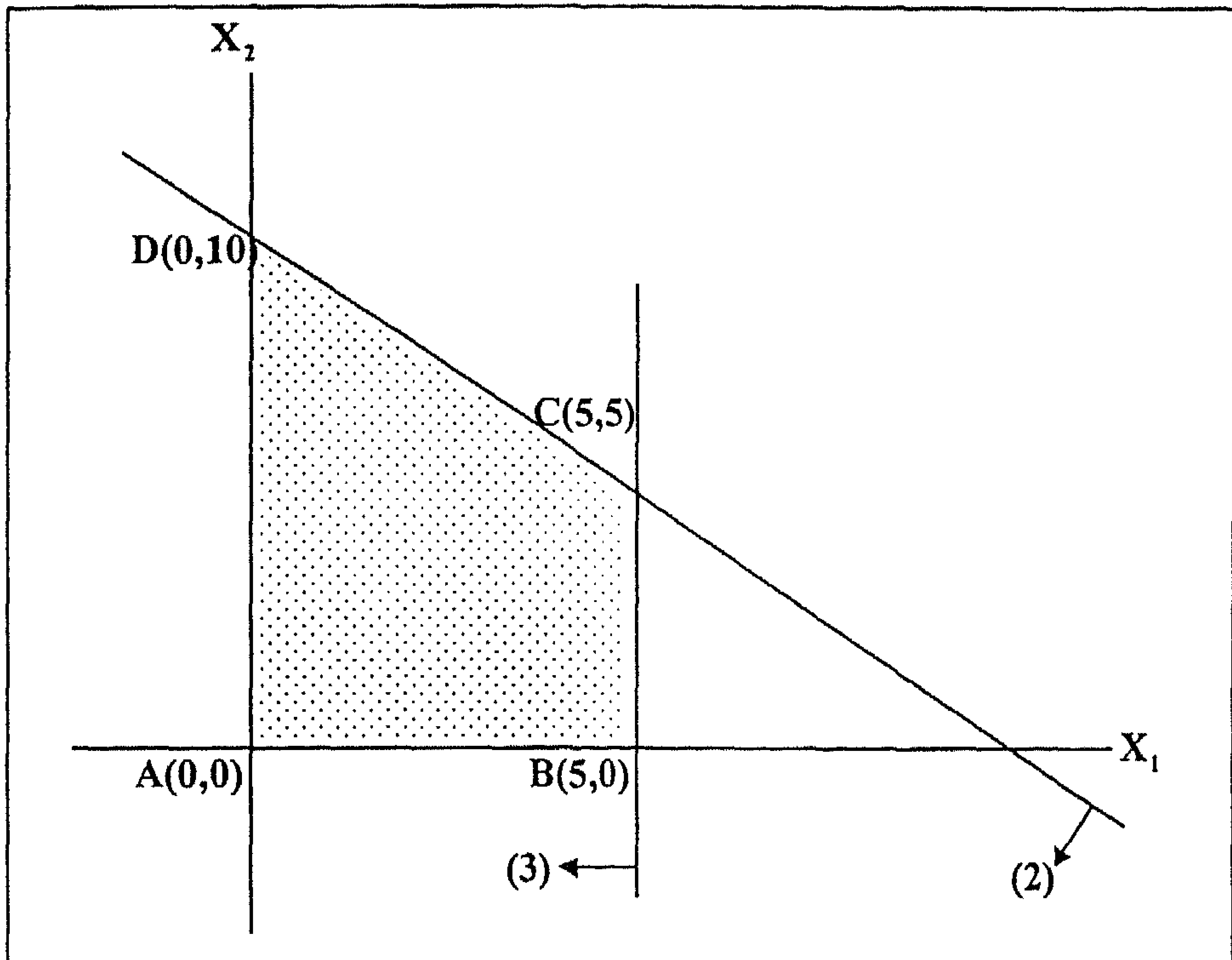
٣- كون المشكلة الثنائية ثم أوجد الحل الأمثل لها باستخدام جداول السمبلكس أيضاً.

٤- من جدول السمبلكس لحل المشكلة الأصلية حدد الحل الأمثل للثنائية.

٥- كذلك من جدول السمبلكس لحل المشكلة الثنائية أوجد الحل الأمثل للأصلية.

الحل: ١- الشكل التالي يوضح منطقة الحلول الممكنة

شكل (٦-١)



من الرسم يتضح أن نقطة الحل الأمثل هي C(5,5) حيث:

$$X_1^* = 5 \quad , \quad X_2^* = 5 \quad , \quad Z^* = 35$$

٢- يمكن وضع المشكلة الأصلية في الصياغة المعيارية على النحو التالي:

$$\text{Max.}Z = 5X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 0S_2 \qquad (5)$$

$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 + S_1 = 10 \qquad (6)$$

$$X_1 \quad + S_2 = 5 \qquad (7)$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0 \qquad (8)$$

والجدول التالي يوضح خطوات الحل – ومن الجدول يتضح أن الحل الأمثل $X_1^* = 5 , X_2^* = 5 , Z^* = 35$ كذلك يتضح من الجدول أن معامل المتغير المكمل S_1 المناظر للقيد (6) في الصف Z في الحل الأمثل يساوى 2 أي $S_1 = 2$ كذلك معامل المتغير المكمل المناظر للقيد الثاني في الصف Z يساوي 3 أي $S_2 = 3$، كما هو موضح في الجدول.

جدول (٦-٣)

عدد مرات إجراء عملية الدوران	المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	الحل
(0)	Z	1	-5	-2	0	0	0
X_1 متغير داخل	S_1	0	1	1	1	0	10
S_2 متغير خارج	S_2	0	1	0	0	1	5
(1)	Z	1	0	-2	0	5	25
X_2 متغير داخل	S_1	0	0	1	0	-1	5
S_1 متغير خارج	X_1	0	1	0	0	1	5
(2)	Z	1	0	0	2	3	35
	X_2	0	0	1	1	-1	5
	X_1	0	1	0	0	1	5

٣- ومن المشكلة في (8)-(5) يمكن تكوين المشكلة الثنائية على النحو التالي:

$$\text{Min.}Y = 10\,Y_1 + 5\,Y_2 \qquad (9)$$

$$\text{S.T.} \quad Y_1 + Y_2 \geq 5 \qquad (10)$$

$$Y_1 \geq 2 \qquad (11)$$

$$Y_1 \geq 0 \qquad (12)$$

$$Y_2 \geq 0 \qquad (13)$$

وبإضافة المتغيرات المكملة والمصطنعة للمشكلة (13)-(9) تصبح المشكلة:

$$\text{Min.}Y = 10\,Y_1 + 5\,Y_2 + 0\,S_1 + 0\,S_2 + M\,R_1 + M\,R_2$$

$$\text{S.T.} \quad Y_1 + Y_2 - S_1^{\backslash} + R_1 = 5$$

$$Y_1 \quad - S_2^{\backslash} + R_2 = 2$$

$$Y_1\,,Y_2\,,S_1^{\backslash}\,,S_2^{\backslash}\,,R_1\,,R_2 \geq 0$$

وباستخدام أسلوب الـ M يكون حل المشكلة على النحو الموضح في الجدول التالي:

جدول (٦-٤)

عدد مرات إجراء عملية الدوران	المتغيرات الأساسية	Y	Y_1	Y_2	$S_1^{\backslash}$	$S_2^{\backslash}$	R_1	R_2	الحل
(0)	Y	1	2M-10	M-5	-M	-M	0	0	7M
Y_1 متغير داخل	R_1	0	1	1	-1	0	1	0	5
R_2 متغير خارج	R_2	0	1	0	0	-1	0	1	2
(1)	Y	1	0	M-5	-M	M-10	0	-2M+10	3M+20
Y_2 متغير داخل	R_1	0	0	1	-1	1	1	-1	3
R_1 متغير خارج	Y_1	0	1	0	0	-1	0	1	2
(2)	Y	1	0	0	-M	-5	5-M	5-M	35
	Y_2	0	0	1	-1	1	1	-1	3
	Y_1	0	1	0	0	-1	0	1	2

ومن الجدول نجد أن الحل الأمثل:

$$Y_1^* = 2 \ , \ Y_2^* = 3 \ , \ Y^* = 35$$

كذلك من جدولين (٦-٣) ، (٦-٤) نجد أن:

١- قيمة دالة الهدف في الحل الأمثل للمشكلة الأصلية تساوي 35، كذلك قيمة دالة الهدف للمشكلة الثنائية في الحل الأمثل تساوى 35 أيضاً. أي أن:

$$\text{Max. } Z = \text{Min. } Y = 35$$

٢- القيم المثلى للمتغيرات الثنائية Y_1^*, Y_2^* في الحل الأمثل للمشكلة الثنائية تساوى معاملات المتغيرات الأساسية في نقطة الحل المبدئية (S_1, S_2) في الصف Z في الحل الأمثل للمشكلة الأصلية، فمن جدول (٦-٣) نجد أن $S_1 = 2$ ، $S_2 = 3$ كذلك من جدول (٦-٤) نجد أن $Y_1^* = 2$ ، $Y_2^* = 3$.

بالمثل نجد من جدول (٦-٤) أن المتغيرات الأساسية في نقطة الحل المبدئية هي R_1, R_2 كذلك نجد أن معامل كل من R_1, R_2 في نقطة الحل الأمثل للمشكلة الثنائية أي في الصف Y تساوي (5-M) بالنسبة لـ R_1 كذلك (5-M) بالنسبة لـ R_2 وهي نفس قيم X_1^*, X_2^* في الحل الأمثل للمشكلة الأصلية بعد حذف M.

(٦-٣) العلاقة بين المشكلتين الأصلية والثنائية

Relationship between Primal & Dual Problems

في الفصل السابق وضحنا كيف يمكن اشتقاق المشكلة الثنائية من المشكلة الأصلية، وكيفية الحصول على الحل الأمثل للمشكلة الثنائية المناظرة لها من الجدول الأخير لحل المشكلة الأصلية. وبالتالي فإنه يوجد عديد من العلاقات بين المشكلة الأصلية والمشكلة الثنائية المناظرة لها. وفيما يلي سوف نقدم أهم النظريات التي تربط بين المشكلة الأصلية والثنائية بهدف استخدام هذه النظريات في دراسة التفسير الاقتصادي وتحليل الحساسية في الفصول التالية من هذا الباب.

نظرية (٦-١): المشكلة الثنائية للمشكلة الثنائية هي المشكلة الأصلية.

الإثبات: أنظر مرجع [44].

فمثلاً إذا اعتبرنا مشكلة البرمجة الخطية (المشكلة الأصلية) على النحو التالي:

$$\text{Max.} Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le b_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots,m \qquad (2)$$

$$X_j \ge 0 \quad , \quad j = 1,2,\ldots,n \qquad (3)$$

فإن المشكلة الثنائية للمشكلة (3)-(1) على النحو التالي:

$$\text{Min.}Y = \sum_{i=1}^{m} b_i \; Y_i \qquad (4)$$

$$\text{S.T.} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \; Y_i \geq C_j \quad , \quad j = 1,2,\ldots,n+m \qquad (5)$$

$$Y_i \geq 0 \qquad (6)$$

وباشتقاق المشكلة الثنائية للمشكلة (6)-(4) تصبح على النحو:

$$\text{Max.}Z = \sum_{j=1}^{n} C_j \; X_j \qquad (7)$$

$$\text{S.T.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \; X_j \leq b_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots,m \qquad (8)$$

$$X_j \geq 0 \quad , \quad j = 1,2,\ldots,n \qquad (9)$$

من (9)-(7) نجد أن المشكلة الثنائية للمشكلة الثنائية (6)-(4) هي نفسها المشكلة الأصلية (3)-(1).

مثال (٦-٤): اعتبر المشكلة التالية:

$$\text{Max.}Z = 2\,X_1 + 3\,X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 \leq 10 \qquad (2)$$

$$X_1 \leq 5 \qquad (3)$$

$$8\,X_1 + 3\,X_2 \geq 24 \qquad (4)$$

$$X_1 \, , X_2 \geq 0 \qquad (5)$$

١- كون المشكلة الثنائية للمشكلة أعلاه.

٢- أوجد المشكلة الثنائية للمشكلة في (١).

الحل: ١- نضع المشكلة (5)-(1) في الصياغة المعيارية

$$Max.Z = 2X_1 + 3X_2$$

$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 + S_1 = 10 \longleftarrow Y_1$$

$$X_1 \quad + S_2 = 5 \longleftarrow Y_2$$

$$-8X_1 - 3X_2 + S_3 = -24 \longleftarrow Y_3$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

المشكلة الثنائية:

$$Min.Y = 10Y_1 + 5Y_2 - 24Y_3 \qquad (6)$$

$$\text{S.T.} \quad Y_1 + Y_2 - 8Y_3 \geq 2 \longleftarrow X_1 \qquad (7)$$

$$Y_1 \quad - 3Y_3 \geq 3 \longleftarrow X_2 \qquad (8)$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0 \qquad (9)$$

٢- وباشتقاق المشكلة الثنائية للمشكلة (9)-(6) نضع أولاً المشكلة في الصياغة المعيارية:

$$Min.Y = 10Y_1 + 5Y_2 - 24Y_3 + 0S_1 + 0S_2$$

$$\text{S.T.} \quad Y_1 + Y_2 - 8Y_3 - S_1 = 2 \longleftarrow X_1$$

$$Y_1 \quad - 3Y_3 - S_2 = 3 \longleftarrow X_2$$

$$Y_1, Y_2, Y_3, S_1, S_2 \geq 0$$

$$Max.Z = 2X_1 + 3X_2$$

$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2 \leq 10$$

$$X_1 \quad \leq 5$$

$$-8X_1 - 3X_2 \leq -24$$

$$-X_1 \leq 0 \quad , \quad -X_2 \leq 0$$

أو:

$$Max.Z = 2X_1 + 3X_2 \quad (10)$$
$$S.T. \quad X_1 + X_2 \le 10 \quad (11)$$
$$X_1 \le 5 \quad (12)$$
$$8X_1 + 3X_2 \ge 24 \quad (13)$$
$$X_1, X_2 \ge 0 \quad (14)$$

فنجد أن المشكلة (14)-(10) هي نفسها المشكلة الأصلية (5)-(1).

نظرية (٦-٢): إذا كان الهدف في المشكلة الأصلية تعظيم (أي Max.Z) فالهدف في المشكلة الثنائية تصغير (Min.Y)، فإن أي حل ممكن للمشكلة الأصلية في جداول السمبلكس تكون قيمة دالة الهدف Z أقل من أو تساوي قيمة دالة الهدف للمشكلة الثنائية Y عند قيم المتغيرات الثنائية المناظرة للحل الممكن للمشكلة الأصلية في الصف Z. أو بعبارة أخرى $Z \le Y$، وعند الحل الأمثل تكون قيمة دالة الهدف للمشكلتين الأصلية والثنائية متساويتين أي $Max.Z = Min.Y$ أو بعبارة أخرى:

$$Z^* = Y^*$$

الإثبات: أنظر مرجع [47].

مثال (٦-٥): اعتبر مثال (٣-٨).

نجد أن المشكلة الثنائية المناظرة للمشكلة الأصلية:

$$\text{Min.}Y = 26\,Y_1 + 34\,Y_2 + 19\,Y_3$$
$$\text{S.T.}\quad 2\,Y_1 + 5\,Y_2 + 4 \quad \geq 2$$
$$5\,Y_1 + 3\,Y_2 \quad \geq 3$$
$$Y_1 + 3\,Y_2 - Y_3 \geq -1$$
$$Y_1\,, Y_2\,, Y_3 \geq 0$$

١- من جدول (٣-٧) نجد أن الحل الممكن المبدئي للمشكلة الأصلية:

$$X_1^{(0)} = 0 \;,\; X_2^{(0)} = 0 \;,\; X_3^{(0)} = 0 \;,\; Z^{(0)} = 0$$

من نفس الجدول نجد أن متغيرات المشكلة الثنائية هي:

$$Y_1 = S_1^{(0)} = 0 \;,\; Y_2 = S_2^{(0)} = 0 \;,\; Y_3 = S_3^{(0)} = 0 \;,\; Y^{(0)} = 0$$

٢- من جدول (٣-٨) نجد أن الحل الممكن التالي للمشكلة الأصلية:

$$X_1^{(1)} = 0 \;,\; X_2^{(1)} = \frac{26}{5} \;,\; X_3^{(1)} = 0 \;,\; Z^{(1)} = \frac{78}{5}$$

ومن نفس الجدول نجد أن:

$$Y_1 = S_1^{(1)} = \frac{3}{5}, Y_2 = S_2^{(1)} = 0, Y_3 = S_3^{(1)} = 0, Y^{(1)} = 26\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{78}{5}$$

٣- من جدول (٣-٩) نجد أن:

$$X_1^{(2)} = \frac{19}{4} \;,\; X_2^{(2)} = \frac{33}{10} \;,\; X_3^{(2)} = 0 \;,\; Z^{(2)} = \frac{97}{5}$$

ومن نفس الجدول نجد أن:

$$Y_1 = S_1^{(2)} = \frac{3}{5} \ , \ \ Y_2 = S_2^{(2)} = 0 \ , \ \ Y_3 = S_3^{(2)} = \frac{1}{5} \ ,$$

$$Y^{(2)} = 26\left(\frac{3}{5}\right) + 19\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{78}{5} + \frac{19}{5} = \frac{97}{5}$$

مثال (٦-٦): اعتبر مشكلة البرمجة الخطية التالية:

$$\begin{aligned} &\text{Min.}Z = 4X_1 + 12X_2 + 18X_3 \\ &\text{S.T.} \quad X_1 \qquad + 3X_3 \geq 3 \longleftarrow Y_1 \\ &\qquad\qquad 2X_2 + 2X_3 \geq 5 \longleftarrow Y_2 \\ &\qquad\qquad X_1 , X_2 , X_3 \geq 0 \end{aligned}$$

أ- كون دالة الهدف للمشكلة الثنائية.

ب-باستخدام أسلوب M أوجد الحل الأمثل للمشكلة الأصلية.

ج- من جدول السمبلكس عند كل نقطة حل ممكنة للمشكلة الأصلية أوجد قيم المتغيرات ودالة الهدف في المشكلة الثنائية.

الحل: أ- دالة الهدف للمشكلة الثنائية:

$$\text{Max.}Y = 3Y_1 + 5Y_2$$

ب- بإضافة المتغيرات المكملة والمصطنعة للمشكلة الأصلية

$$\begin{aligned} &\text{Min.}Z = 4X_1 + 12X_2 + 18X_3 + 0S_1 + 0S_2 + MR_1 + MR_2 \\ &\text{S.T.} \quad X_1 \qquad + 3X_3 - S_1 + R_1 = 3 \\ &\qquad\qquad 2X_2 + 2X_3 - S_2 + R_2 = 5 \\ &\qquad\qquad X_1 , X_2 , X_3 , S_1 , S_2 , R_1 , R_2 \geq 0 \end{aligned}$$

والجدول التالي يوضح الحل الأمثل للمشكلة حيث:

$$X_1^* = 0 \quad , \quad X_2^* = \frac{3}{2} \quad , \quad X_3^* = 1 \quad , \quad Z^* = 36$$

جدول (٦-٥)

عددمرات إجراء عملية الدوران	المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	R_1	R_2	الحل
(0)	Z	1	+(M -4)	2M -12	5M -18	0	0	-M	-M	8M
X_3 متغير داخل	R_1	0	1	0	3	-1	0	1	0	3
R_1 متغير خارج	R_2	0	0	2	2	0	-1	0	1	5
(1)	Z	1	(-2M +6)/3	2M -12	0	(2M-18)/3	-M	-(5M+8) / 3	0	3M +18
X_2 متغير داخل	X_3	0	1/3	0	1	-1/3	0	1/3	0	1
R_2 متغير خارج	R_2	0	-2/3	2	0	2/3	-1	-2/3	1	3
(2)	Z	1	-4	0	0	-2	-6	-M+2	-M+6	36
	X_3	0	1/3	0	1	-1/3	0	1/3	0	1
	X_2	0	-1/3	1	0	1/3	-1/2	-1/3	1/2	3/2

ج- بما أن نقطة الحل الممكنة هي نقطة الحل المثلى بالتالي فإن المتغيرات الثنائية Y_1, Y_2 هي المتغيرات المناظرة لمعاملات R_1, R_2 في الصف Z على الترتيب، بالتالي من الجدول السابق وبعد حذف M نجد أن:

$$Y_1^* = 2 \quad , \quad Y_3^* = 6 \quad , \quad Y^* = 36$$

(٦-٤) التفسير الاقتصادي للمتغيرات الثنائية

Economic Interpretation of the Dual Variables

في الفصل السابق تناولنا باختصار بعض العلاقات بين المشكلة الأصلية والمشكلة الثنائية. وفي هذا الفصل سوف نوضح أن قيم المتغيرات الثنائية في الحل الأمثل ولتكن Y_i^* ، حيث $i = 1,2,...,m$ تعطى معلومات هامة وذات دلالة لمتخذ القرار في حالة إمكانية حدوث تغيير في واحد أو أكثر من معلمات المشكلة الأصلية. فإذا اعتبرنا المشكلة الأصلية:

$$\text{Max.}Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$\text{S.T.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \le b_i \quad , \quad i = 1,2,...,m$$

$$X_j \ge 0 \quad , \quad j = 1,2,...,n$$

والمشكلة الثنائية المناظرة لها على النحو:

$$\text{Min.}Y = \sum_{i=1}^{m} b_i Y_i$$

$$\text{S.T.} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} Y_i \ge C_j \quad , \quad j = 1,2,...,n$$

$$Y_i \text{ متغيرات حقيقية} \quad , \quad i = 1,2,...,m$$

من نظرية (٦-٢) بالفصل السابق يتضح أنه في الحل الأمثل

$$\text{Max.}Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j^* = \text{Min.}Y = \sum_{i=1}^{m} b_i Y_i^* \qquad (6.21)$$

حيث X_j^* تشير إلى القيم المثلى للمتغيرات القرارية في المشكلة الأصلية، كذلك تشير Y_i^* إلى القيم المثلى للمتغيرات في المشكلة الثنائية المناظرة.

ومن العلاقة (6.21) يتضح أن القيمة المثلى للمتغير البديل Y_i^* تمثل معامل للمعلمة b_i، حيث $i = 1,2,...,m$ أي أن Y_i^* تمثل مساهمة الوحدة الواحدة من المعلمة b_i في قيمة دالة الهدف Y أو Z.

كذلك X_j^* معامل للمعلمة C_j، حيث $j = 1,2,...,n$ أي أن X_j^* تمثل مساهمة الوحدة الواحدة من المعلمة C_j في دالة الهدف Z أو Y. وبعبارة أخرى زيادة C_j بوحدة واحدة سوف يؤدي إلى زيادة دالة الهدف بمقدار X_j^* وحدة والعكس صحيح أي نقص C_j بوحدة واحدة سوف يؤدي إلى نقص دالة الهدف بمقدار X_j^*.

وبالتالي فإن القيم المثلى Y_i^* تعطى دلالة واضحة لمتخذ القرار في تحديد أي الإمكانيات (b_i) التي يتم تغييرها. والأمثلة التالية سوف توضح ذلك بالتفصيل.

<u>مثال (٦-٧)</u>: تقوم أحدى المنشآت بإنتاج نوعين من المنتجات A , B التي تطلب نفس نوعية مستلزمات الإنتاج ونفس نوعية ساعات التشغيل.

والجدول التالي يوضح عدد الوحدات المتاحة من مستلزمات الإنتاج وعدد ساعات التشغيل لإنتاج الوحدة الواحدة من A , B كذلك ربح الوحدة الواحدة.

جدول (٦-٦)

متطلبات الإنتاج	متطلبات انتاج الوحدة الواحدة من A	B	الإمكانيات المتاحة
مستلزمات الإنتاج	3	7	210
ساعات التشغيل	1	4	80
ربح الوحدة بالجنية	90	280	

المطلوب: ١- صيغ المشكلة كنموذج برمجة خطية.

٢- وضح بيانياً الحل الأمثل.

٣- حل المشكلة باستخدام جداول السمبلكس.

٤- من جدول السمبلكس أوجد القيم المثلى للمشكلة الثنائية ثم عقب على الناتج ووضح ذلك بيانياً في الشكل بـ (٢).

الحل: ١- إذا فرضنا أن X_1, X_2 تشير إلى عدد الوحدات التي يتم إنتاجها من A,B على الترتيب - فتصبح المشكلة على النحو التالي:

$$Max.Z = 90\,X_1 + 280\,X_2 \qquad (1)$$

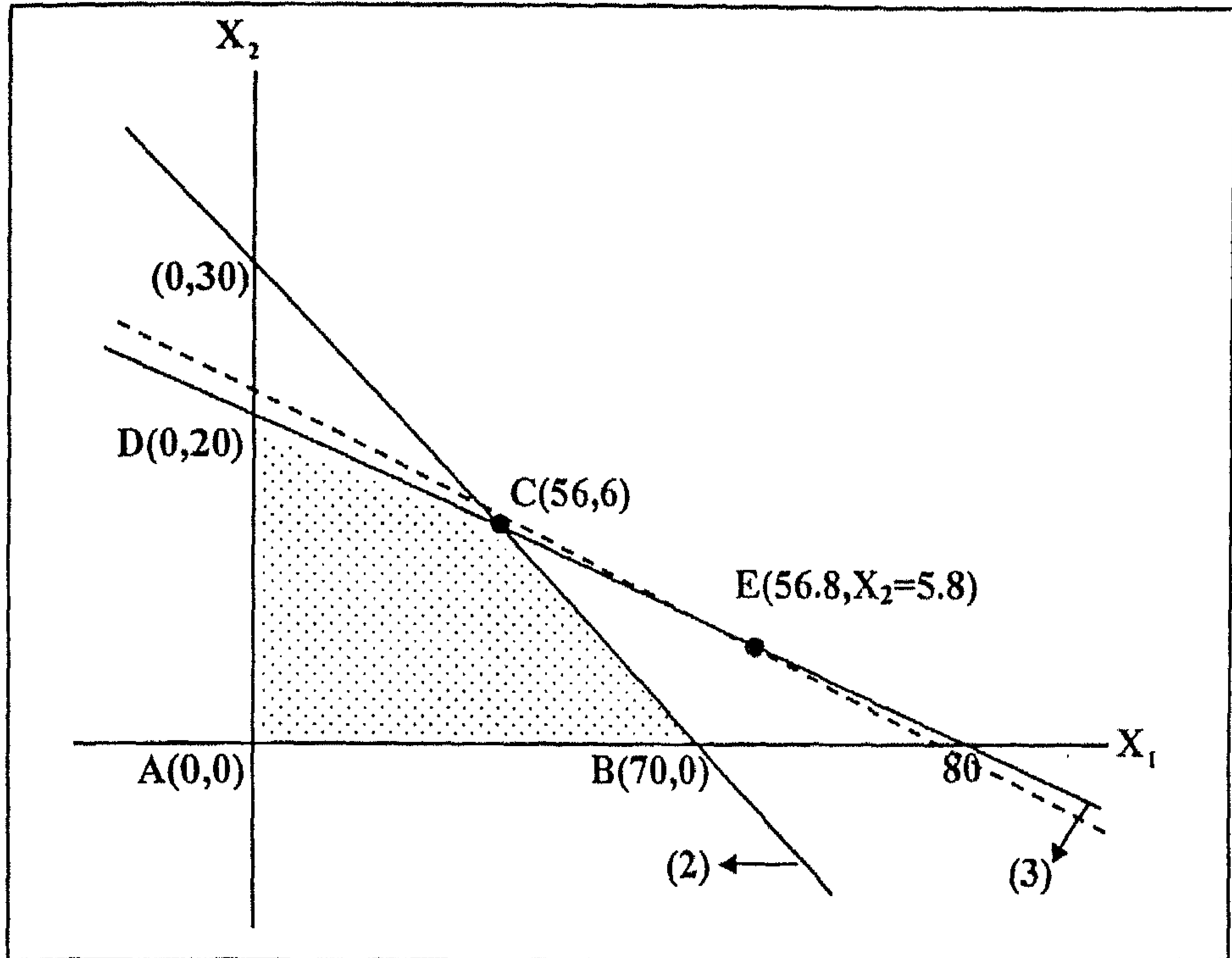
$$S.T. \quad 3\,X_1 + 7\,X_2 \le 210 \qquad (2)$$

$$X_1 + 4\,X_2 \le 80 \qquad (3)$$

$$X_1 , X_2 \ge 0 \qquad (4)$$

٢- والشكل التالي يوضح الحل الأمثل عند النقطة C:

شكل (٦-٢)



$$X_1^* = 56 \quad , \quad X_2^* = 6 \quad , \quad Z^* = 6720$$

٣- والجدول التالى يوضح المشكلة باستخدام جداول السمبلكس.

٤- من الجدول يتضح أن $Y_2^* = 42$, $Y_1^* = 16$ وبما أن Y_1, Y_2 تناظر القيدين (3) , (2) على الترتيب وهذا يعنى زيادة الطرف الأيمن للقيد (2) بوحدة واحدة أي التغيير من 210 إلى 211 سوف يؤدي ذلك إلى زيادة دالة الهدف Z بمقدار 16 وحدة أي زيادة قيمة Z من 6720 إلى 6736.

بالمثل زيادة الطرف الأيمن للقيد (3) بوحدة واحدة أي التغيير من 80 إلى 81 سوف يؤدي إلى زيادة دالة الهدف بمقدار 42 وحدة. أي تتغير دالة الهدف من

6720 إلى 6762. وبالتالي فإنه يمكن لمتخذ القرار المفاضلة بين زيادة مستلزمات الإنتاج أو زيادة ساعات التشغيل آخذ في الاعتبار أن زيادة مستلزمات الإنتاج بوحدة واحدة سوف يؤدي إلى زيادة الربح بـ16جنيه في حين أن زيادة ساعات التشغيل بساعة واحدة سوف يؤدي إلى زيادة الربح بـ42 جنيه.

جدول (٦-٧)

عدد مرات إجراء عملية الدوران	المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	الحل
(0)	Z	1	-90	-280	0	0	0
X_2متغير داخل	S_1	0	3	7	1	0	210
S_2 متغير خارج	S_2	0	1	4	0	1	80
(1)	Z	1	-20	0	0	70	6500
X_1 متغير داخل	S_1	0	5/4	0	1	-7/4	70
S_1 متغير خارج	X_2	0	1/4	1	0	1/4	20
(2)	Z	1	0	0	16	42	6720
	X_1	0	1	0	4/5	-7/5	56
	X_2	0	0	1	-1/5	1/4	6

ب- كذلك من العلاقة (6.21) يتضح أن X_j^* هي معامل للمعلمة C_j وبما أن $X_1^* = 56$, $X_2^* = 6$ وبما أن $C = 90$ بالتالي فإن تغيير C_1 من 90 إلى 91 سوف يؤدي إلى زيادة قيمة دالة الهدف بـ 56 جنيه، بالمثل زيادة C_2 بجنيه واحد أي تغيير C_2 من 280 إلى 281 سوف يؤدي إلى زيادة الربح بـ 6 جنيه. وبالتالي يكون أفضل لمتخذ القرار إذا أراد زيادة أرباحه الكلية فإنه أفضل له أن يعمل على زيادة ربحه من المنتج A.

(٦-٥) تحليل الحساسية Sensitivity Analysis

إذا اعتبرنا نموذج البرمجة الخطية للمشكلة الأصلية (الثنائية) على النحو:

$$\text{Max.(Min.)}Z = \sum_{j=1}^{n} C_j\, X_j \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad \sum_{j-1}^{n} a_{ij}\, X_j \begin{matrix}\le\\=\\\ge\end{matrix} b_i \quad , \quad i = 1,2,\dots,m \qquad (2)$$

$$X_j \ge 0 \quad , \quad j = 1,2,\dots,n \qquad (3)$$

حيث تعتبر $a_{ij}\,, b_i\,, C_j$ بحيث $i = 1,2,\dots,m\,,\ j = 1,2,\dots,n$ معلمات النموذج (المتغيرات التحكمية) وعادة تعطى في شكل قيم رقمية كما سبق توضيح ذلك في الأمثلة في الأبواب السابقة. ويترتب على قيم هذه المعلمات تحديد الحل الأمثل للمشكلة $X_j^*\,, Z^*$.

ولكن قيم المعلمات $a_{ij}\,, b_i\,, C_j$ أو بعضها قد تتغير نتيجة عوامل اقتصادية أو سياسية أو طبيعية. وقد يؤثر هذا التغير على الحل الأمثل $X_j^*\,, Z^*$. ولكن في العديد من الحالات قد لا يؤثر [49].

ودراسة تأثير هذا التغير في قيمة معلمة أو أكثر هو ما يسمى بتحليل الحساسية. وبالتالى فتحليل الحساسية يتناول تأثير التغير في قيم بعض أو كل معلمات النموذج بحيث يمكن تحديد الحالات التالية:-

١- إذا لم يؤدي التغير في قيم المعلمات إلى تغير في الحل الأمثل $X_j^*\,, Z^*$ أي لم يؤثر على قيمة دالة الهدف أو المتغيرات الأساسية X_j^* - وبالتالي يبقى الحل الأمثل كما هو.

٢- إذا أدى التغير إلى عدم تغير المتغيرات الأساسية Basic Variables في الحل ولكن تغير في قيم هذه المتغيرات، وبالتالي تغير قيم Z^* , X_j^*.

٣- إذا أدى التغير إلى تغير في المتغيرات الأساسية في الحل النهائي. وبالتالى تغير الحل الأمثل أى تغير في المتغيرات X_j^* وتغير قيمة Z^*.

ويعتبر تحديد أي حالة من هذه الحالات التي أدى إليها التغير في بعض قيم المعلمات ذو أهمية بالغة بالنسبة لمتخذ القرار، فعلى أساس هذا التحديد يمكن لمتخذ القرار تحديد سياسته بحيث يمكن [52]:

- تحديد أنواع الموارد التي يمكن توفير كميات منها بدون إحداث تغيير في السياسة المتبعة (الحل الحالي للنموذج) وبالتالي إنقاص التكاليف.
- تحديد أنواع الموارد التي بها ندرة وتؤثر على السياسة الحالية.
- تحديد ظروف السوق بالنسبة للأسعار (التكاليف ، الربح) التي يمكن أن تؤثر على تغيير السياسة المتبعة (الحل الحالي).

وسوف نوضح ذلك من خلال الأمثلة التالية.

أولاً: التغيرات في الطرف الأيمن للقيود الهيكلية Changes in b_i's

قبل أن ندرس تأثير التغير في واحد على الأقل من قيم الطرف الأيمن للقيود الهيكلية في (2)، أي حدوث تغير في b_i، لأبد أن نعرف أنواع القيود في الحل الأمثل Z^* , X_j^* (الحل الحالي Current Solution).

تعريف (٦-١): يقال أن القيد رقم i $\left(\sum_j a_{ij} X_j \begin{smallmatrix}\le\\=\\\ge\end{smallmatrix} b_i\right)$ قيد حرج Tight (or binding) Constraint إذا أدى حدوث أي تغير في b_i إلى حدوث تغير

في الحل الأمثل، و يكون القيد حرج إذا تحقق في صورة متساوية (معادلة في الحل الأمثل) بمعنى $\sum_j a_{ij} X_j^* = b_i$. وسوف نوضح ذلك في المثال التالي.

تعريف (٦-٢): يقال أن القيد رقم i $\left(\sum_j a_{ij} X_j \overset{\leq}{\underset{\geq}{=}} b_i\right)$ قيد غير حرج Loss (or nonbinding) Constraint وهذا يعنى أنه إذا حدث تغير في قيمة b_i سوف لا يؤدي إلى حدوث تغير في الحل الأمثل، ويكون القيد غير حرج إذا تحقق في شكل متباينة (< أو >) وليس في شكل متساوية. وسوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي.

مثال (٦-٨): تقوم أحدى شركات إنتاج المنظفات بإنتاج نوعين من مساحيق التنظيف B , A ، حجم عبوه الوحدة الواحدة من كل نوع كيلوجرام. والجدول التالي يوضح متطلبات الإنتاج من مستلزمات كيماوية وساعات العمل المتاحة كذلك ربح الوحدة الواحدة من كل نوع.

جدول (٦-٨)

متطلبات الإنتاج المتاحة يومياً	المتطلب لإنتاج الوحدة الواحدة A	B	المتاح
مواد كيماوية	0.5	0.4	500 كيلوجرام
ساعات التشغيل	0.01	0.004	8 ساعات
الربح بالجنية	16	12	

فإذا كان الطلب اليومي المتوقع على A لا يزيد عن 700 كذلك الطلب اليومي على B لا يزيد عن 1900.

المطلوب: ١- صيغ المشكلة كنموذج برمجة خطية.

٢- أوجد الحل الأمثل بيانياً.

٣- من الرسم حدد نوع كل قيد هيكلي (حرج أو غير حرج).

الحل: إذا فرضنا أن X_1, X_2 تشير إلى عدد الوحدات التي يجب إنتاجها يومياً من A , B على الترتيب فإن $X_1, X_2 \geq 0$ كذلك

$$0.5\,X_1 + 0.4\,X_2 \leq 500 \longrightarrow 5\,X_1 + 4\,X_2 \leq 5000$$

$$0.01\,X_1 + 0.004\,X_2 \leq 8 \longrightarrow 10\,X_1 + 4\,X_2 \leq 8000$$

$$X_1 \leq 700 \quad , \quad X_2 \leq 1900$$

ويصبح النموذج على النحو التالي:

أوجد قيم X_1, X_2 التي تجعل

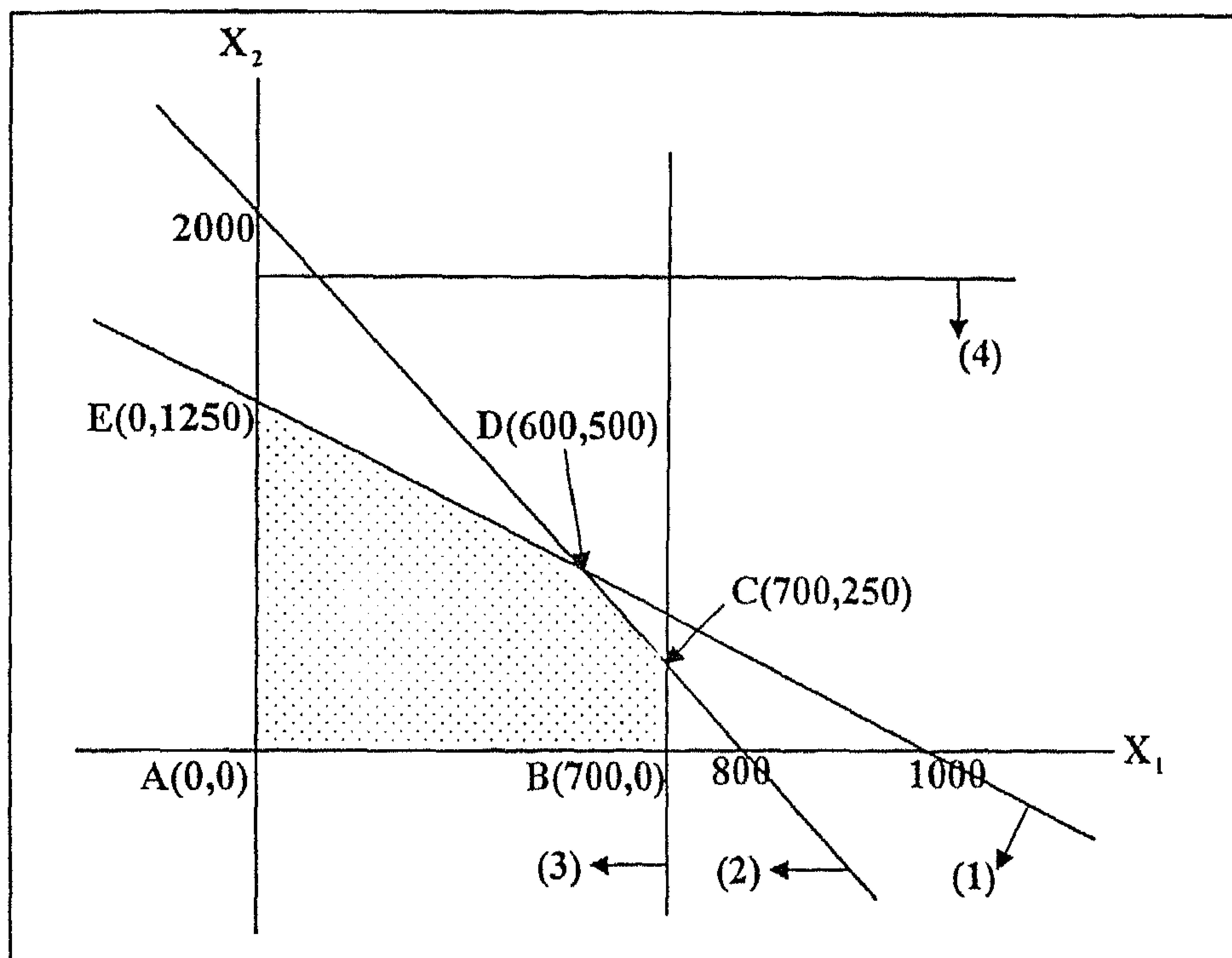
$$\text{Max.}Z = 16\,X_1 + 12\,X_2$$

$$\begin{aligned} \text{S.T.} \quad 5\,X_1 + 4\,X_2 &\leq 5000 && (1) \\ 10\,X_1 + 4\,X_2 &\leq 8000 && (2) \\ X_1 &\leq 700 && (3) \\ X_2 &\leq 1900 && (4) \\ X_1 , X_2 &\geq 0 && (5) \end{aligned}$$

ومن الرسم يتضح أن الحل الأمثل في النقطة D حيث:

$X_1^* = 600$, $X_2^* = 500$, $Z^* = 15600$ جنيه

شكل (٦-٣)



٣- من الرسم يتضح التالي:

رقم القيد	نوعه
(1)	حرج
(2)	حرج
(3)	غير حرج
(4)	غير حرج

والتغير في بعض أو كل معلمات الطرف الأيمن b_i بحيث $i = 1,2,...,m$ يؤثر على شرط الإتاحة (الإمكانية – أنظر الباب الثامن). فقد يؤدي إلى تغير في

الحل الأمثل الحالي أو قد يؤدي إلى عدم تغير المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل ولكن يؤدي إلى تغير في قيمهم. Z^*, X_j^*

وهنا يكون من الأهمية تحديد المدى الذي يتغير فيه b_i ، $i = 1,2,...,m$ ، بحيث تظل المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل الحالي هي نفس المتغيرات الأساسية ولكن قد يحدث تغير في قيمة كل من Z^*, X_j^*.

فإذا اعتبرنا جدول السمبلكس في الحل الأمثل الحالي واعتبرنا المصفوفة C (حيث تمثل أعمدة المصفوفة المتغيرات المكملة أو المصطنعة المناظرة لـ b_i ، $i = 1,2,...,m$ التي تمثل متغيرات أساسية في الحل المبدئي. وتمثل صفوف المصفوفة المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل الحالي) حيث العنصر C_{ik} يشير إلى العنصر المناظر للمتغير الأساسي (i) والمتغير المكمل أو المصطنع (k) – أي المناظر للقيد رقم k.

<u>ملحوظة</u>: المصفوفة C هي معكوس مصفوفة معاملات المتغيرات الأساسية في القيود الهيكلية، أي $C = B^{-1}$ حيث $X_B^* = B^{-1}b$ – كما سوف نوضح ذلك بالتفصيل في الباب الثامن.

فإذا أشرنا إلى الطرف الأيمن للقيد رقم (k) بالرمز b_k فإذا حدث تغير في b_k بمقدار Δ_k فإن حدود Δ_k المسموح بها حتى تظل المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل هي نفسها المتغيرات الأساسية ولكن بقيم مختلفة، يمكن اشتقاقها من العلاقة التالية [47]:

$$\underset{C_{ik}}{\text{Max.}}\left\{\frac{-X_{Bi}}{C_{ik}}\right\} \text{ or } 0 \le \Delta_k \le \underset{C_{ik}}{\text{Min.}}\left\{\frac{-X_{Bi}}{C_{ik}}\right\} \text{ or } 0 \qquad (6.22)$$

حيث تشير X_{Bi} إلى قيمة المتغير الأساسي رقم (i) في الحـل الأمثـل الحـالي. وسوف نوضح تطبيق العلاقة (6.22) من خلال الأمثلة التالية.

ويمكن تحديد القيم للمتغيرات الأساسية X_B^* بعد إحداث التغير في b من العلاقـة التالية:

$$X_B^* = C(b + \Delta) \qquad (6.23)$$

حيث X_B^* متجه المتغيرات الأساسية، $(b + \Delta)$ يشير إلى متجه الطرف الأيمـن بعد التغير في قيم b_i بحيث $i = 1,2,...,m$.

ملحوظة: في الباب الثامن سوف نقدم أثبات العلاقتين (6.22)، (6.23) من خلال شرطي الإتاحة والأمثلية (أنظر الباب الثامن)

مثال (٦-٩): اعتبر مثال (٦-٨).

١- حل المشكلة باستخدام جداول السمبلكس وحدد الحل الأمثل.

٢- من جدول السمبلكس حدد المصفوفة C.

٣- أوجد حدود التغيرات الممكن حدوثها في الطرف الأيمن للقيدين (4),(3) بحيث لا تتغير المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل.

٤- عقب على النتائج في (٣).

٥- أوجد حدود التغيرات الممكن حدوثها في الطرف الأيمن للقيـد (1) بحيث لا تتغير المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل.

الحل: ١- جدول (٦-٩) يوضح حل المشكلة باستخدام جداول الـسمبلكس ومـن الجدول الأخير نجد أن: $Z = 15600$, $X_2^* = 500$, $X_1^* = 600$

جدول (٦-٩)

عدد مرات إجراء عملية الدوران	المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	الحل
(0)	Z	1	-16	-12	0	0	0	0	0
X_1 متغير داخل	S_1	0	5	4	1	0	0	0	5000
S_3 متغير خارج	S_2	0	10	4	0	1	0	0	8000
	S_3	0	1	0	0	0	1	0	700
	S_4	0	0	1	0	0	0	1	1900
(1)	Z	1	0	-12	0	0	16	0	11200
X_2 متغير داخل	S_1	0	0	4	1	0	-5	0	1500
S_2 متغير خارج	S_2	0	0	4	0	1	-10	0	1000
	X_1	0	1	0	0	0	1	0	700
	S_4	0	0	1	0	0	0	1	1900
(2)	Z	1	0	0	0	+3	-14	0	14200
S_3 متغير داخل	S_1	0	0	0	1	-1	5	0	500
S_1 متغير خارج	X_2	0	0	1	0	1/4	-10/4	0	250
	X_1	0	1	0	0	0	1	0	700
	S_4	0	0	0	0	-1/4	10/4	1	1650
(3)	Z	1	0	0	14/5	1/5	0	0	15600
	S_3	0	0	0	1/5	-1/5	1	0	100
	X_2	0	0	0	1/2	-1/4	0	0	500
	X_1	0	0	1	-1/5	1/5	0	0	600
	S_4	0	1	0	-1/2	1/4	0	1	1400

٢- من الجدول نجد أن المصفوفة C على النحو التالي:

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{matrix} b_1 & \downarrow & b_2 \downarrow & b_3 \downarrow & b_4 \\ S_1 & & S_2 & S_3 & S_4 \end{matrix} \\ (100) & S_3^* \longrightarrow & \begin{bmatrix} 1/5 & -1/5 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/4 & 0 & 0 \\ -1/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ (500) & X_2^* \longrightarrow & \\ (600) & X_1^* \longrightarrow & \\ (1400) & S_4^* \longrightarrow & \end{array}$$

٣-

$$\text{Max.}\left\{\frac{-100}{1},-,-,-\right\} \le \Delta_3 \longrightarrow \Delta_3 \ge -100$$

كذلك

$$\text{Max.}\left\{-,-,-,\frac{-1400}{1}\right\} \le \Delta_4 \longrightarrow \Delta_4 \ge -1400$$

وبما أن $b_3 = 700 \ , \ b_4 = 1900$ بالتالي فإنه يوجد حل (أو حلول) ممكنة عندما تصبح كل من b_3, b_4 على النحو:

$$b_3 \ge 700 - 100 \longrightarrow b_3 \ge 600$$

كذلك

$$b_4 \ge 1900 - 1400 \longrightarrow b_4 \ge 500$$

٤- وبما أن b_3, b_4 تحدد حجم الطلب على A,B على الترتيب. من (٣) نجد أنه عندما يتغير حجم الطلب على A,B بالنقصان تظل نفس سياسة الإنتـــاج (أي يظل نفس الحل الأمثل السابق) طالما أن الطلب أكبر من أويساوى 500 , 600 على A , B على الترتيب.

٥-

$$Max.\left\{\frac{-100}{1/5},\frac{-500}{1/2}\right\} \le \Delta_1 \le Min.\left\{\frac{-600}{-1/5},\frac{-1400}{-1/2}\right\}$$

$$\longrightarrow$$

$$-500 \le \Delta_1 \le 2800$$

وبما أن $b_1 = 5000$ وبالتالي فإن المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل لا تتغير عندما يصبح $4500 \le b_1 \le 7800$ ولكن تتغير قيم المتغيرات الأساسية فقط.

<u>مثال (٦-١٠)</u>: اعتبر نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\begin{aligned} Max.Z &= -2X_1 + 4X_2 - 2X_3 \\ S.T.\quad 3X_1 + X_2 - X_3 &\le 10 \quad (1) \\ -X_1 + 4X_2 + X_3 &\ge 6 \quad (2) \\ X_2 + X_3 &\le 4 \quad (3) \\ X_1, X_2, X_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

١- أوجد الحل الأمثل للمشكلة باستخدام أسلوب M.

٢- من جدول الحل الأمثل أوجد معكوس مصفوفة المعاملات للمتغيرات الأساسية في الحل الأمثل (المصفوفة C).

٣- باستخدام المصفوفة C حدد مقدار التغير في الطرف الأيمن للقيدين (3),(2) بحيث تظل المتغيرات الأساسية في الحل الحالي هي نفسها بعد التغير.

٤- أوجد الحل الأمثل عندما تصبح $b_2 = 5\ ,\ b_3 = 5$.

الحل: ١- بإضافة المتغيرات المكملة والمصطنعة تصبح المشكلة على النحو التالي:

$$\text{Max.}Z = -2X_1 + 4X_2 - 2X_3 - MR_2$$

$$\begin{aligned} \text{S.T.}\quad & 3X_1 + X_2 - X_3 + S_1 = 10 \\ & -X_1 + 4X_2 + X_3 - S_2 + R_2 = 6 \\ & X_2 + X_3 + S_3 = 4 \\ & X_1, X_2, X_3, S_1, S_2, S_3, R_2 \geq 0 \end{aligned}$$

حيث S_1, S_2, S_3 متغيرات مكملة، R_2 متغير مصطنع. وجدول (٦-١٠) يوضح الحل باستخدام أسلوب M.

من الجدول يتضح أن الحل الأمثل الحالي:

$$Z^* = 8 \quad , \quad X_1^* = 0 \quad , \quad X_2^* = 4 \quad , \quad X_3^* = 0$$

٢- من الجدول يتضح أن المصفوفة C على النحو التالي:

$$\begin{array}{lll} & & \begin{matrix} b_1 & b_2\downarrow & b_3 \\ S_1 & R_2 & S_3 \end{matrix} \\ (6) & S_1^* \longrightarrow & \\ (4) & X_2^* \longrightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \\ (10) & S_2^* \longrightarrow & \end{array}$$

$$\Delta_2 \leq \left\{ -, -, \frac{-10}{-1} \right\} \longrightarrow \Delta_2 \leq 10$$

$$\text{Max.}\left\{ \frac{-4}{1}, \frac{-10}{4} \right\} \leq \Delta_3 \leq \text{Min.}\left\{ \frac{-6}{-1} \right\} \longrightarrow$$

$$-2.5 \leq \Delta_3 \leq 6$$

جدول (٦-١٠)

عدد مرات الدوران	المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R_2	الحل
(0) X_2 متغير داخل R_2 متغير خارج	Z	1	(1+ M)	-(2+ 4M)	1+M	0	0	0	M	-6M
	S_1	0	3	1	-1	1	0	0	0	10
	R_2	0	-1	4	1	0	-1	0	1	6
	S_3	0	0	1	1	0	0	1	0	4
(1) S_2 متغير داخل S_3 متغير خارج	Z	1	2/4	0	(6+8 M)/4	0	-1/2	0	(2+4 M)/4	3
	S_1	0	13/4	0	-5/4	1	1/4	0	-1/4	34/4
	X_2	0	-1/4	1	1/4	0	-1/4	0	1/4	6/4
	S_3	0	1/4	0	3/4	0	1/4	1	-1/4	10/4
(2)	Z	1	1	0	(3+2 M)	0	0	2	2M	8
	S_1	0	3	0	-2	1	0	-1	0	6
	X_2	0	0	1	1	0	0	1	0	4
	S_2	0	1	0	3	0	1	4	-1	10

وبما أن $b_3 = 4$ ، $b_2 = 6$ ، بالتالي تصبح b_2, b_3 على النحو التالي:

$$b_2 \le 6 + 10 \longrightarrow b_2 \le 16$$

$$4 - 2.5 \le b_3 \le 4 + 6 \longrightarrow 1.5 \le b_3 \le 10$$

٤- في هذه الحالة نجد أن $(b+\Delta)=\begin{bmatrix}10\\5\\5\end{bmatrix}$

بالتالي فمن العلاقة (6.15) نجد أن الحل الأمثل بعد التغيير على النحو التالي:

$$X_B^* = \begin{bmatrix}S_1\\X_2\\S_2\end{bmatrix} = C(b+\Delta) = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1\\0 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\5\\5\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}5\\5\\15\end{bmatrix} \longrightarrow Z^* = 20$$

ومما سبق يمكن أن نخلص للآتي وفقاً لتعريف القيود الهيكلية الحرجة والقيود الهيكلية غير الحرجة:

١- نجد أنه عند حدوث تغيير في الطرف الأيمن للقيود الحرجة في المدى المسموح به لبقاء المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل قبل التغيير فإن هذا التغيير سوف يؤدي إلى تغيير قيم المتغيرات الأساسية وبالتالي تغيير قيمة دالة الهدف.

٢- أما بالنسبة للقيود غير الحرجة فإن حدوث التغير في الطرف الأيمن لهذه القيود غير الحرجة داخل الفترة المسموح بها للتغيير فإن هذا التغيير لا يؤثر على قيم المتغيرات الأساسية وقيمة دالة الهدف في الحل الأمثل قبل التغيير. وسوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي

٣- إذا حدث التغير في b_i، $i = 1,2,..,m$، خارج الحدود المسموح بها فهذا سوف يؤدي إلى تغير المتغيرات الأساسية في الحل وبالتالي تغير الحل.

وعادة يسمى الطرف الأيمن للقيود الحرجة بالموارد النادرة Scare Resources نظراً لأن التغير في قيم الطرف الأيمن في الفترة المسموح فيها للقيود الحرجة يؤثر بالزيادة (أو النقص) على قيم المتغيرات الأساسية ودالة الهدف.

كذلك يسمى الطرف الأيمن للقيود غير الحرجة بالموارد الوفيرة Abundant Resources نظراً لأن التغير في قيم الطرف الأيمن للقيود غير الحرجة (في الفترة المسموح فيها) لا يؤثر على الحل من حيث قيم المتغيرات الأساسية ودالة الهدف وبالتالي يمكن تخفيض قيم الطرف الأيمن للقيود غير الحرجة مما يؤدي إلى توفير في هذه الموارد [51].

وسوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي.

<u>مثال (٦-١١)</u>: اعتبر مثال (٦-٨) – والمطلوب:

١- تحديد المدى الذي يحدث فيه تغيير b_1, b_2 بحيث لا تتغير المتغيرات الأساسية.

٢- إذا تغير الكميات المتاحة من $b_1 = 5000$ إلى $b_1 = 6000$. كذلك من $b_2 = 8000$ إلى $b_2 = 8500$.

٣- عقب على النتائج في (٢).

٤- إذا تغير حجم الطلب على B , A من $b_3 = 700$ إلى $b_3 = 600$ كذلك $b_4 = 1900$ إلى $b_4 = 500$. ثم عقب على النتائج.

الحل: ١- من جدول السمبلكس رقم (٦-٩) نجد أن المصفوفة C على النحو:

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{matrix} b_1\downarrow & b_2\downarrow & b_3 & b_4 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{matrix} \\ (100) & S_3^* \longrightarrow & \\ (500) & X_2^* \longrightarrow & \\ (600) & X_1^* \longrightarrow & \\ (1400) & S_4^* \longrightarrow & \end{array} \begin{bmatrix} 1/5 & -1/5 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/4 & 0 & 0 \\ -1/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Max.\left\{\frac{-100}{1/5}, \frac{-500}{1/2}\right\} \le \Delta_1 \le Min.\left\{\frac{-600}{-1/5}, \frac{-1400}{-1/2}\right\}$$

$$-500 \le \Delta_1 \le 2800$$

وبما أن $b_1 = 5000$ بالتالي فإنه بعد التغيير يصبح

$$5000 - 500 \le b_1 \le 5000 + 2800 \longrightarrow 4500 \le b_1 \le 7800$$

بالمثل:

$$Max.\left\{\frac{-600}{1/5}, \frac{-1400}{1/4}\right\} \le \Delta_2 \le Min.\left\{\frac{-100}{-1/5}, \frac{-500}{-1/4}\right\}$$

$$-3000 \le \Delta_2 \le 500$$

وبما أن $b_2 = 8000$ بالتالي فإنه بعد التغيير يصبح

$$8000 - 3000 \le b_2 \le 8000 + 500 \longrightarrow 5000 \le b_2 \le 8500$$

٢- إذا تغير b_1 من $b_1 = 5000$ إلى $b_1 = 6000$، وتغير b_2 من $b_2 = 8000$ إلى $b_2 = 8500$ فيكون الحل الأمثل في هذه الحالة:

$$X_B^* = \begin{bmatrix} S_3 \\ X_2 \\ X_1 \\ S_4 \end{bmatrix} = C(b+\Delta) = \begin{bmatrix} 1/5 & -1/5 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/4 & 0 & 0 \\ -1/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6000 \\ 8500 \\ 700 \\ 1900 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 200 \\ 875 \\ 500 \\ 1025 \end{bmatrix}$$

٣- أي أن:

$$Z^* = 18500 \quad , \quad X_1^* = 500 \quad , \quad X_2^* = 875$$

وهذا يعنى أن X_1, X_2 مازالت هي المتغيرات الأساسية ولكن نتيجة لزيادة b_1 من 5000 إلى 6000 ، كذلك زيادة b_2 من 8000 إلى 8500 أدى إلى تغيير قيم X_1, X_2 من $X_1 = 600 \ , \ X_2 = 500$ إلى $X_1 = 500 \ , \ X_2 = 875$ وكذلك تغير قيمة دالة الهدف Z من $Z = 15600$ إلى $Z = 18500$.

٤- من شكل (٦-٣) كذلك من جدول (٦-٩) يتضح أن كل من القيدين (3),(4) قيود غير حرجة فإذا تغير b_3 من $b_3 = 700$ إلى $b_3 = 600$ كذلك b_4 من $b_4 = 1900$ إلى $b_4 = 500$. (أي داخل الفترة المسموح فيها بالتصغير أنظر مثال (٦-٩)).

فنجد أن الحل في هذه الحالة:

$$\begin{matrix} & & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ & & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} (100) & S_3^* \\ (500) & X_2^* \\ (600) & X_1^* \\ (1400) & S_4^* \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & -1/5 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/4 & 0 & 0 \\ -1/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5000 \\ 8000 \\ 600 \\ 500 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 500 \\ 600 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن الحل الأمثل بعد حدوث تغير في b_3, b_4 على النحو التالي:

$$X_1^* = 600 \quad , \quad X_2^* = 500 \quad , \quad Z^* = 15600$$

أي أنه رغم حدوث تغير بالنقصان في b_3, b_4 فإن ذلك لم يؤثر على الحل الأمثل وذلك يرجع إلى أن التغير حدث في القيود غير الحرجة وداخل الفترة المسموح بها.

ملحوظة: مما سبق يتضح أن تحليل الحساسية يمكن متخذ القرار من تحديد الموارد غير النادرة (للقيود غير الحرجة) والتي يمكن أن يحقق فيها وفر دون حدوث تغير في الحل الأمثل.

ثانياً: التغير في Variations in C

وفي هذا الفصل سوف نتناول التغير في بعض (أو كل) معاملات المتغيرات القرارية في دالة الهدف C_j حيث $j = 1,2,...,n$.

فإذا حدث تغير في المعامل C_k بمقدار Δ_k، ففي حالة إذا كان الهدف تعظيم (Max.) فإنه وفقاً لشرط الأمثلية لأبد أن تكون قيم Z_j للمتغيرات غير الأساسية (في الصف Z في الجدول النهائي) تكون $Z_j \geq 0$.

وهنا لأبد أن نفرق بين حالتين هما:

<u>الحالة الأولى</u>: عندما يكون المعامل (أو المعاملات) $C_{j'}$ الذي يحدث فيه تغير مناظر لمتغير غير أساسي (في الحل الأمثل الحالي) أو بعبارة أخرى عندما $C_{j'} \notin C_B$ (حيث C_B تشير إلى متجه معاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف).

في هذه الحالة يظل الحل الأمثل الحالي بدون تغيير رغم تغير $C_{j'}$ إلى $(C_{j'} + \Delta_{j'})$ طالما أن:

$$\Delta_{j'} \leq Z^*_{j'} \qquad C_{j'} \notin C_B \qquad (6.24)$$

<u>الحالة الثانية</u>: إذا كان C_k بحيث $C_k \in C_B$ في هذه الحالة يظل الحل الأمثل الحالي قبل تغيير C_k إلى $(C_k + \Delta_k)$ طالما تقع Δ_k في الحدود بالعلاقة التالية:

$$\underset{C_{kj'}>0}{\text{Max.}}\left\{\frac{-Z^*_{j'}}{C_{kj'}}\right\} \text{or } 0 \leq \Delta_k \leq \underset{C_{kj'}<0}{\text{Min.}}\left\{\frac{-Z^*_{j'}}{C_{kj'}}\right\} \text{or } 0 \qquad (6.25)$$

لجميع قيم j'، $j' \notin C_B$ حيث $Z^*_{j'}$ تشير إلى معامل المتغير غير الأساسي j' في صف دالة الهدف $Z^*_{j'}$ في الحل الأمثل الحالي، كذلك $C_{kj'}$ هو العنصر في الصف k والعمود j' في المصفوفة C.

الإثبات: من شرط الأمثلية [47] في الفصل (٨-٣) يمكن بسهولة إثبات العلاقة (6.25).

مثال (٦-١٢): اعتبر مثال (٦-٩).

فإذا تغير C_2 من $C_2 = 12$ إلى $C_2 = 8$.

الحل: بما أن C_2 تمثل معامل المتغير X_2 في دالة الهدف، وبما أن X_2 متغير أساسي في الحل الأمثل كما هو موضح في جدول (٦-٩) حيث الحل الحالي:

$$S_3^* = 100 \quad , \quad X_2^* = 500 \quad , \quad X_1^* = 600 \quad , \quad S_4^* = 1400 \quad , \quad Z^* = 15600$$

وبما أن المصفوفة C حيث:

$$\begin{array}{r} \\ S_3^* \\ \longrightarrow X_2^* \\ X_1^* \\ S_4^* \\ Z_j^* \end{array} \begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ \left[\begin{array}{c} 1/5 \\ 1/2 \\ -1/5 \\ -1/2 \end{array}\right. & \begin{array}{c} -1/5 \\ 3/4 \\ 1/5 \\ 1/4 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \left.\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right] \\ \left(\frac{14}{5}\right) & \left(\frac{1}{5}\right) & (0) & (0) \end{array}$$

باستخدام العلاقة (6.25)

$$\text{Max.}\left\{\frac{-14/5}{1/2} , \frac{-14/5}{3/4}\right\} \le \Delta_2 \longrightarrow \Delta_2 \ge -3.7$$

وبما أن $C_2 = 12$ بالتالي فإن:

$$12 - 3.7 \le C_2 \le 12 \quad \longrightarrow \quad 8.3 \le C_2 \le 12$$

وبما أن $C_2 = 8$ تقع داخل الفترة لـ C_2 بالتالي فإن الحل الأمثل السابق يظل بدون تغير نتيجة تغير ربح الوحدة الواحدة من 12 جنيه إلى 8 جنيه.

مثال (٦-١٣): اعتبر نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$
\begin{aligned}
\text{Max.}Z &= 3X_1 + 5X_2 + 4X_3 \\
\text{S.T.}\quad 2X_1 + 3X_2 &\le 8 \\
2X_2 + 5X_3 &\le 10 \\
3X_1 + 2X_2 + 4X_3 &\le 15 \\
X_1, X_2, X_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

المطلوب: ١- أوجد الحل الأمثل.

٢- حدد المدى الذي يحدث فيه تغير في كل من C_3, C_4 كذلك b_2 بحيث يظل الحل الأمثل بدون تغير.

الحل: ١- الجدول التالي يوضح الحل الأمثل للنموذج.

جدول (٦-١١)

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الحل
Z_j^*	1	0	0	0	45/41	24/41	11/41	765/41
X_2	0	0	1	0	15/41	8/41	-10/41	50/41
X_3	0	0	0	1	-6/41	5/41	4/41	62/41
X_1	0	1	0	0	-2/41	-12/41	15/41	89/41

من الجدول السابق نجد أن المصفوفة C على النحو التالي:

$$\begin{array}{ccc} & & b_1 & b_2 \downarrow & b_3 \\ & & S_1 & S_2 & S_3 \\ (50/41) & X_2^* & 15/41 & 8/41 & -10/41 \\ \longrightarrow (62/40) & X_3^* & -6/41 & 5/41 & 4/41 \\ (89/41) & X_1^* & -2/41 & -12/41 & 15/41 \\ & Z_j^* & 45/41 & 24/41 & 11/41 \end{array}$$

وبما أن $C_3 = 4$ فإذا أشرنا إلى التغير في C_3 بالرمز Δ_{C_3} بحيث يظل الحل الحالي حل أمثل، من العلاقة (6.25) نجد أن:

$$\text{Max.}\left\{\frac{-24/41}{5/41}, \frac{-11/41}{4/41}\right\} \le \Delta_{C_3} \le \text{Min.}\left\{\frac{-45/41}{-6/41}\right\}$$

$$\longrightarrow 4 - \frac{11}{4} \le C_3 \le 4 + \frac{15}{2} \longrightarrow \frac{5}{4} \le C_3 \le \frac{23}{2}$$

للتغير في b_2 بالرمز Δ_2 فإن:

$$\text{Max.}\left\{\frac{-50/41}{24/41}, \frac{-62/41}{5/41}\right\} \le \Delta_2 \le \text{Min.}\left\{\frac{-89/41}{-12/41}\right\}$$

$$\longrightarrow$$

$$-\frac{25}{4} \le \Delta_2 \le \frac{89}{12} \longrightarrow$$

$$10 - \frac{25}{4} \le b_2 \le 10 + \frac{89}{12} \longrightarrow \frac{15}{4} \le b_2 \le \frac{209}{12}$$

(٦-٦) تمرينات   Exercises

(٦-١) أوجد المشكلة الثنائية للمشكلات التالية:

(1) $Max.Z = -10X_1 + 4X_2$

S.T. $-X_1 + X_2 \le -3$

$2X_1 + 3X_2 \le 5$

$X_1, X_2 \ge 0$

(2) $Min.Z = 2X_1 + X_2$

S.T. $6X_1 - 3X_2 + X_3 \ge 2$

$3X_1 + 4X_2 + X_3 \ge 5$

$X_1, X_2, X_3 \ge 0$

(3) $Max.Z = 10X_1 + 12X_2$

S.T. $X_1 + 2X_2 = 5$

$-X_1 + 5X_2 \ge 3$

X_1 متغير حقيقي , $X_2 \ge 0$

(4) $Min.Z = 3X_1 + 4X_2 + 6X_3$

S.T. $X_1 + X_2 \ge 10$

$X_1, X_3 \ge 0$

$X_2 \le 0$

(5) $Max.Z = 5X_1 + 5X_2$

S.T. $2X_1 + X_2 = 5$

$3X_1 - X_2 = 6$

X_1, X_2 متغيرات حقيقية

(6) $Min.Z = 2X_1 + 4X_2 - 6X_3$

S.T. $-X_1 + X_2 + X_3 = 5$

$12X_1 - 9X_2 + 9X_3 \ge 8$

$X_1, X_2, X_3 \ge 0$

(٦-٢) اعتبر نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max.Z = 5X_1 + 2X_2 + 7X_3$$

S.T. $X_1 + 5X_2 + 2X_3 = 30$

$X_1 - 5X_2 - 6X_3 \le 40$

$X_1, X_2, X_3 \ge 0$

والجدول التالي يعطى الحل الأمثل للنموذج باستخدام الـ M

جدول (٦-١٢)

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	X_3	M_1	S_2	الحل
Z	1	0	23	7	5+M	0	150
X_1	0	1	5	2	1	0	30
X_3	0	0	-10	-8	-1	1	10

المطلوب: ١- أوجد المشكلة الثنائية.

٢- من الجدول أوجد الحل الأمثل للمشكلة الثنائية.

٣- حدد حدود التغير في الطرف الأيمن للقيود بحيث تظل المتغيرات الأساسية في الحل الحالي في الحل بعد التغير ثم حدد قيم هذه المتغيرات.

٤- إذا تم تغير C_3 من $C_3 = 3$ إلى $C_3 = 6$ - هل يحدث تغير في الحل الأمثل.

(٦-٣) اعتبر نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\begin{aligned} \text{Max.}Z &= 2X_1 + 4X_2 + 4X_3 - 3X_4 \\ \text{S.T.}\quad & X_1 + X_2 + X_3 = 4 \\ & X_1 + 4X_2 + X_4 = 8 \\ & X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0 \end{aligned}$$

والجدول التالي يوضح الحل الأمثل للمشكلة باستخدام أسلوب المرحلتين

جدول (٦-١٣)

المتغيرات الأساسية	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	الحل
Z	1	2	0	0	3	16
X_3	0	3/4	0	1	-1/4	2
X_2	0	1/4	1	0	1/4	2

المطلوب: ١- أوجد المشكلة الثنائية.

٢- من جدول الحل الأمثل للمشكلة الأصلية - أوجد الحل الأمثل للمشكلة الثنائية.

٣- إذا تغير الطرف الأيمن للقيود من $b_1 = 4, b_2 = 8$ إلى $b_1 = 5, b_2 = 10$ - هل يتغير الحل الأساسي الأمثل؟

٤- إذا تغيرت C_2, C_3 من $C_2 = 4, C_3 = 4$ إلى $C_2 = 2, C_3 = 5$ - هل يظل الحل الأمثل الحالي نفس الحل بعد التغيير؟

الباب السابع

مشاكل البرمجة الخطية العكسية

The Inverse Linear Programming Problems

(٧-١) مشاكل الأمثلية العكسية

The Inverse Optimization Problems

(٧-٢) البرمجة الخطية العكسية

Inverse Linear Programming

(٧-٣) خطوات حل المشكلة العكسية Procedure Solution

(٧-٤) تمرينات Exercises

(٧-١) مشاكل الأمثلية العكسية
The Inverse Optimization Problems

في كثير من مشاكل الأمثلية Optimization Problems (سواء مشاكل خطية أو غير خطية) بعد الحصول على الحل الأمثل (X^*, Z^*) للمشكلة قد تطرأ بعض التغيرات في الظروف المحيطة بالمشكلة ويكون من الأهمية لمتخذ القرار أن يجعل أحد الحلول الممكنة المعينة Certain Feasible Solution للمشكلة وليكن X^0 حل أمثل، أو بعبارة أخرى يصبح الحل الأمثل (X^0, Z^*) وذلك من خلال إمكانية إحداث تغيير في معلمة أو أكثر من معالم Parameters النموذج، وتصبح مشكلة متخذ القرار الحصول على القيم المثلى للمعلمات التي يمكن إحداث تغيير بها بحيث يصبح الحل الممكن X^0 حل أمثل (X^0, Z^*)، وتسمى مشكلة تحديد القيم المثلى للمعلمات Parameters التي يمكن إحداث تغيير بها بحيث يكون الحل الأمثل للمشكلة (X^0, Z^*) بالمشكلة العكسية لمشكلة الأمثلية أو معكوس مشكلة الأمثلية Inverse Optimization Problem.

وتعتبر دراسة مشاكل الأمثلية العكسية حديثة نسبياً بدأت في النصف الثاني من القرن العشرين، ويعتبر كل من Burton and Toint سنة 1992 [22] أول من قدما تعريف مشاكل البرمجة العكسية.

ونظراً لأهمية هذا النوع من الدراسات والتحليل لما تتيحه من معلومات هامة لمتخذ القرار. ونظراً لأهمية تطبيقات هذا النوع من مشاكل الأمثلية في

المجالات الحربية، الهندسية، الطبية، الاقتصادية، التجارية، ... ، الخ [١٣] فقد قدمت عديد من الدراسات في السنوات الأخيرة [16,32,33,35].

فعلى سبيل المثال بالنسبة للمجالات الاقتصادية والتجارية وبصفة خاصة بالنسبة للسوق الحر يكون من الأهمية لمتخذ القرار تحديد الحجم الأمثل للعرض Supply، الطلب Demand، الأسعار .... الخ والتي كانت تمثل معلمات بالنسبة لمشاكل الأمثلية Optimization Problems العادية.

وسوف تقتصر دراستنا في هذا الباب على البرمجة الخطية العكسية Inverse Linear Programming أي كيفية اشتقاق المشكلة العكسية من المشكلة الأصلية للبرمجة الخطية، وكيفية الحصول على الحل الأمثل لها عند طلب وإمكانية إحداث تغيير في معلمات دالة الهدف C_j، حيث $j = 1,2,...,n$ فقط.

(٧-٢) البرمجة الخطية العكسية

Inverse Linear Programming

في هذا الفصل سوف نوضح مفهوم البرمجة الخطية العكسية من خلال المثال التالي – ثم نقدم نموذج البرمجة الخطية العكسية المناظر لنموذج البرمجة الخطية.

مثال (٧-١): متاح لدى أحدى الشركات للمستحضرات الكيمائية إنتاج 4 أنواع A , B , C , D من المستحضرات بحيث يدخل في إنتاج كل نوع نوعين من الخامات I , II كذلك يوضح الجدول التالي تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة من كل منتج بالمليون جنيه، حيث لا تقل الكمية المستخدمة من الخام I عن 7 طن، ولا تقل الكمية المستخدمة من الخام II عن 10 طن.

جدول (٧-١)

المنتج / المواد الخام	احتياج الوحدة الواحدة بالطن			
	A	B	C	D
الخام I	1	4	1	0
الخام II	2	1	0	1
التكلفة بالمليون جنيه	3	2	3	0

١- ويمكن صياغة المشكلة أعلاه كنموذج برمجة خطية على النحو التالي:

$$\text{Min.}Z = 3X_1 + 2X_2 + X_3$$

$$\text{S.T.} \quad X_1 + 4X_2 + X_3 \geq 7$$

$$2X_1 + X_2 + X_4 \geq 10$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

وبحل المشكلة باستخدام طريقة السمبلكس (باستخدام الـ M أو أسلوب المرحلتين) نجد أن الحل الأمثل على النحو التالي:

$$Z^* = 3.5 \quad , \quad X_1^* = 0 \quad , \quad X_2^* = 1.75 \quad , \quad X_3^* = 0 \quad , \quad X_4^* = 8.25$$

ومن الحل يتضح أن أقل تكلفة تساوي 3.5 مليون جنيه في حالة إنتاج الكمية 1.75 بالطن من B ، والكمية 8.25 بالطن من المنتج D.

٢- فإذا فرضنا أن متخذ القرار يرى أن متطلبات المرحلة تتطلب إنتاج كمية من A تساوى 4.71 ومن المنتج B كمية تساوى 0.57 طن أي أن الحل الممكن $X_1^0 = 4.71 , X_2^0 = 0.57$. ويرغب أيضاً أن تظل التكلفة تساوي التكلفة المثلى Z^* أي تساوي $Z^* = 3.5$ مليون جنيه فتصبح مشكلة متخذ القرار هي كيفية تحديد القيم المثلى لمعاملات المتغيرات القرارية في دالة الهدف، أي إيجاد قيم d_j المثلى حيث يتم تغيير C_j إلى d_j بحيث يصبح الحل الممكن (X^0) حل أمثل (X^0, Z^*) وتكون المشكلة العكسية هي إيجاد القيم المثلى لقيم المتجه d بحيث يصبح الحل (X^0, Z^*) حل أمثل.

وبصفة عامة، إذا كانت المشكلة الأصلية Primal Problem في شكلها المتعارف عليه Canonical Form (أنظر الفصل ٦-١) على النحو التالي:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Min.}Z = \sum C_j X_j \qquad , \quad j = 1,2,\ldots,n \\ &\text{S.T.} \quad \sum_j a_{ij} X_j \geq b_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots,m \\ &\qquad\quad X_j \geq 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7.1)$$

فإذا كان الحل الأمثل للمشكلة (X^*, Z^*)، وكانت المشكلة الثنائية المناظرة للمشكلة في (7.1) على النحو التالي:

$$\left.\begin{aligned}&\text{Max.}\Pi = \sum_{i=1}^{m} b_i\,\Pi_i\\&\text{S.T.}\quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\,\Pi_i \le C_j \quad , \quad j = 1,2,\ldots,n\\&\qquad \Pi_i \ \text{متغيرات حقيقية} \ , \quad i = 1,2,\ldots,m\end{aligned}\right\} \qquad (7.2)$$

فإذا كان الحل الأمثل للمشكلة الثنائية على النحو (Π_i^*, Π^*) حيث $\Pi^* = Z^*$. فإذا فرضنا أن X^0 حل ممكن للمشكلة (7.1) كذلك إذا فرضنا أن الفئة B تشير إلى فئة القيود الحرجة (أنظر تعريف (٦-١)) عند نقطة الحل X^0 أو بعبارة أخرى.

$$B = \left\{ i \in m : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j^0 = b_i \right\} \qquad (7.3)$$

وكما ذكرنا سابقاً إذا تم تغيير قيم المتجه C إلى d بحيث يصبح الحل الممكن X^0 حل أمثل بشرط أن يكون الفرق بين C ، d أقل ما يمكن [16]، وتسمى هذه المشكلة بالمشكلة العكسية لمشكلة البرمجة الخطية في (7.1)، ويصبح نموذج البرمجة العكسية على النحو التالي:

أوجد قيم d_j بحيث $j = 1,2,..,n$ التي تجعل:

$$\left.\begin{aligned}&\text{Min.}Z_{inv.} = \|d - C\|\, X_j = \sum_{j=1}^{n} \left| d_j - C_j \right| X_j\\&\text{S.T.}\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, X_j \ge b_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots,m\\&\qquad X_j \ge 0\end{aligned}\right\} \qquad (7.4)$$

وباستخدام أسلوب التحويلات يمكن إثبات أن

$$\left.\begin{array}{l} \text{Min.}Z_{inv} = \sum_{j=1}^{n} \left| d_j - C_j \right| X_j \\ \text{S.T.} \quad \sum_{i \in B} a_{ij}\, \Pi_i = d_j \quad , \quad j = 1,2,\dots,n \\ \qquad\quad \Pi_i \geq 0 \end{array}\right\} \qquad (7.5)$$

ويمكن تحويل النموذج (7.5) إلى نموذج برمجة خطية وبحله يمكن الحصول على القيم المثلى لـ d_j ولتكن d_j^* ، $j = 1,2,..,n$ [33].

ولكن في سنة 1996 أثبت كل من Zhangon and Liu [35] أنه يمكن إيجاد القيم المثلى d_j^* من العلاقة التالية:

$$d_j^* = \begin{cases} C_j - \left| C_j^{\Pi} \right| & \text{if } C_j^{\Pi} > 0 \ , \ X_j^0 > 0 \\ C_j + \left| C_j^{\Pi} \right| & \text{if } C_j^{\Pi} < 0 \\ C_j & \text{if } C_j^{\Pi} = 0 \end{cases} \qquad (7.6)$$

$$C_j^{\Pi} = C_j - \sum_{i \in B} a_{ij}\, \Pi_j^* \qquad (7.7)$$

ملحوظة: ١- الدالة $\| d - C \|$ تسمى دالة المقياس Norm من الدرجة 2 ، أنظر ملحق رقم (C).

٢- الهدف للمشكلة الأصلية عملية تصغير والهدف في المشكلة العكسية أيضاً عملية تصغير.

٣- سواء كان الهدف للمشكلة الأصلية تعظيم أو تصغير يكون هدف المشكلة العكسية عملية تصغير فقط (يمكن تحويل دالة الهدف الخطية من عملية تعظيم إلى عملية تصغير بالضرب في (−)).

(٧-٣) خطوات حل المشكلة العكسية Procedure Solution

مما سبق يتضح أنه يمكن الحصول على القيم المثلى d_j^* بحل النموذج (7.5) بعد إجراء بعض التحويلات لدالة الهدف، أو يمكن الحصول على الحل الأمثل d_j^* أيضاً من العلاقات (7.6). وفيما يلي نقدم الخطوات للحصول على d_j^* باستخدام العلاقات (7.6) على النحو التالي:

<u>خوارزم (٧-١)</u>: ١- نوجد الحل الأمثل للمشكلة الأصلية وليكون (X^*, Z^*).

٢- نكون المشكلة الثنائية المناظرة للمشكلة الأصلية ونوجد الحل الأمثل لها وليكن (Π_i^*, Π^*).

٣- إذا فرضنا أن الحل الممكن المطلوب أن يكون حل أمثل وليكن X^0.

٤- نحدد فئة القيود الحرجة B في المشكلة الأصلية عند نقطة الحل الممكن X^0.

٥- نوجد القيم C_j^{Π} باستخدام العلاقة (7.7).

٦- نحسب قيم d_j^* باستخدام العلاقات (7.6).

<u>مثال (٧-٢)</u>: اعتبر مشكلة البرمجة الخطية التالية:

$$\text{Min.} Z = 40 X_1 + 30 X_2$$
$$\text{S.T.} \quad X_1 + 2 X_2 \geq 40$$
$$4 X_1 + 3 X_2 \leq 120$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

المطلوب: ١- وضح بيانياً منطقة الحلول الممكنة والحل الأمثل أيضاً.

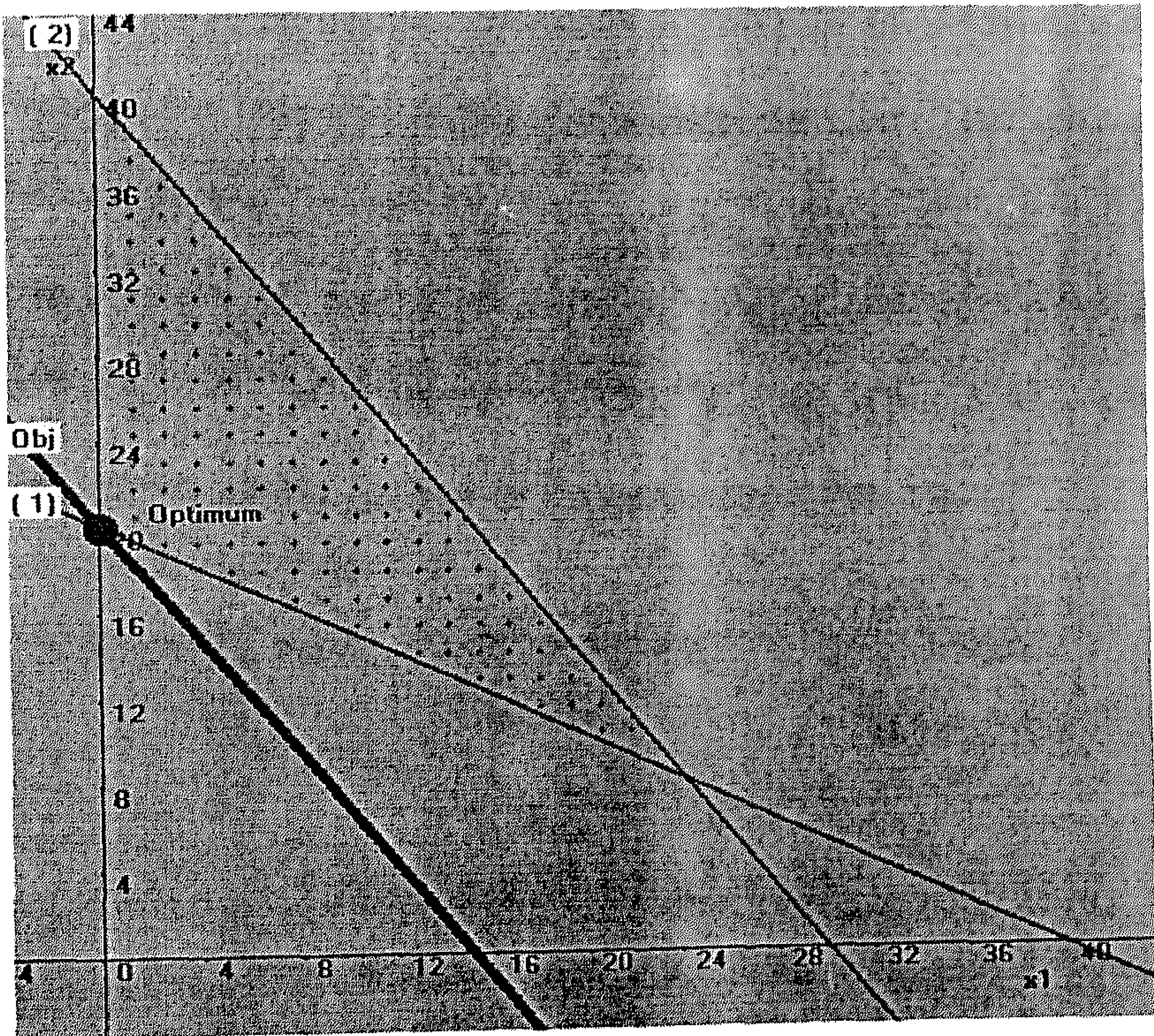
٢- كون المشكلة الثنائية، ثم أوجد الحل الأمثل لها.

٣- إذا اعتبرنا الحل الممكن X^0 حيث $X_1^0 = 24$, $X_2^0 = 8$ ، كون المشكلة العكسية بحيث يكون الحل الممكن X^0 حل أمثل.

الحل: ١- الشكل التالي يوضح منطقة الحلول الممكنة والحل الأمثل أيضاً حيث:

$$X_1^* = 0 \ , \ X_2^* = 20 \ , \ Z^* = 600$$

شكل (٧-١)



٢- فيما يلي المشكلة الثنائية في شكلها المتعــارف عليــه Canonical Form المناظرة للمشكلة أعلاه.

$$Max.\Pi = 40\,\Pi_1 - 120\,\Pi_2$$
$$S.T. \quad \Pi_1 - 4\,\Pi_2 \le 40$$
$$2\,\Pi_1 - 3\,\Pi_2 \le 30$$
$$\Pi_1 , \Pi_2 \ge 0$$

وبحل المشكلة الثنائية نجد أن الحل الأمثل:

$$\Pi_1^* = 15 \quad , \quad \Pi_2^* = 0 \quad , \quad \Pi^* = 600$$

٣- إذا فرضنا أن نقطة الحل الممكنة X^0 بحيث $X_1^0 = 24 \; , \; X_2^0 = 8$.

٤- نوجد الفئة B حيث:

$$B = \left\{ X_1^0 + 2\,X_2^0 = 40 \;\; , \;\; 4\,X_1^0 + 3\,X_2^0 = 120 \right\}$$

٥- نحسب C_j^{Π} على النحو التالي:

$$C_1^{\Pi} = C_1 - \sum_{i \in B} a_{ij}\,\Pi_i^* = 40 - \left\{ 2\,\Pi_2^* \right\} = 40 - 15 = 25$$

$$C_2^{\Pi} = C_2 - \sum_{i \in B} a_{ij}\,\Pi_i^* = 30 - \left\{ 3\,\Pi_2^* \right\} = 30 - 30 = 0$$

$$\longrightarrow$$

$$d_1^* = C_1 - C_1^{\Pi} = 40 - 25 = 15$$

$$d_2^* = C_2 = 30$$

٦- وتصبح المشكلة العكسية:

$$\begin{aligned} Min.Z_{inv} &= 15\,X_1 + 30\,X_2 \\ S.T. \quad X_1 + 2\,X_2 &\ge 40 \\ 4\,X_1 + 3\,X_2 &\le 120 \\ X_1\,,X_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

ويكون الحل الأمثل هو:

$$X_1^* = X_1^0 = 24 \quad , \quad X_2^* = X_2^0 = 8 \quad , \quad Z_{inv} = 600$$

مثال (٧-٣): إذا اعتبرنا مثال (٧-١) أوجد المشكلة العكسية لمشكلة البرمجة الخطية – ويرغب متخذ القرار في تغيير الكميات المثلى التي يجب إنتاجها من A,B حيث $X_1^* = 0\,,X_2^* = 1.75\,,X_3^* = 0\,,X_4^* = 8.5$ إلى الكميات $X_1^0 = 4.71\,,X_2^0 = 0.75\,,X_3^0 = 0\,,X_4^0 = 0$ بحيث تظل أقل تكلفة تساوى $Z^* = 3.5$ مليون جنيه. باستخدام البرمجة العكسية حدد التغير في تكلفة الوحدة الواحدة من A , B.

الحل: بما أن نموذج البرمجة الخطية التي يمثل المشكلة على النحو التالي:

$$\left.\begin{aligned} Min.Z &= 3\,X_1 + 2\,X_2 + X_3 \\ S.T. \quad X_1 + 4\,X_2 + X_3 \quad &\ge 7 \\ 2\,X_1 + X_2 \qquad + X_4 &\ge 10 \\ X_1\,,X_2\,,X_3\,,X_4 &\ge 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

١- بحل المشكلة نجد أن:

$$X_1^* = 0 \quad , \quad X_2^* = 1.75 \quad , \quad X_3^* = 0 \quad , \quad X_4^* = 8.25 \quad , \quad Z^* = 3.5$$

٢- تحديد المشكلة الثنائية المناظرة للمشكلة (١) على النحو التالي:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Max.}\Pi = 7\,\Pi_1 + 10\,\Pi_2 \\ &\text{S.T.} \quad \Pi_1 + 2\,\Pi_2 \le 3 \\ &\qquad 4\,\Pi_1 + \Pi_2 \le 2 \\ &\qquad \Pi_1 \le 3 \\ &\qquad \Pi_2 \text{ متغير حقيقي} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

وبحل المشكلة الثنائية نجد أن الحل الأمثل على النحو التالي:

$$\Pi_1^* = 0.5 \;\;,\;\; \Pi_2^* = 0 \;\;,\;\; \Pi^* = 3.5$$

٣- إذا اعتبرنا أن الحل الممكن $(X_1^0 = 4.71 \;,\; X_2^0 = 0.57)$، نوجد فئة القيــود الحرجة B حيث:

$$B = \{\, 2\,X_1 + X_2 + X_4 = 10 \,\}$$

٤- نحسب C_j^{Π} على النحو التالي:

$$C_1^{\Pi} = 3 - \{1\,\Pi_1^* + 2\,\Pi_2^*\} = 3 - \{0.5\} = 2.5$$

$$C_2^{\Pi} = 2 - \{4\,\Pi_1^* + \Pi_2^*\} = 2 - \{2(0.5)\} = 0$$

$$d_1^* = 3 - 2.5 = 0.5$$

وبما أن $C_2^{\Pi} = 0$ فهذا يعنى أن $d_2^* = C_2$ بالتالي:

$$d_2^* = C_2 = 2$$

وهــذا يعنـــى أن القيمـــة المثلـــى لـــــ Z عنـــد الحـــل الممكـــن $X_1^0 = 4.71 \;,\; X_2^0 = 0.57$ تساوي 3.5 مليون جنيه أيضاً عندما تتغير C_1 من 3 إلى 0.5 وتظل C_2 كما هي أي $C_2 = 2$.

ومما هو جدير بالذكر أن من التطبيقات الهامة والناجحة لأسلوب البرمجة العكسية مشكلة التخصيص [32].

(٧-٤) تمرينات Exercises

(٧-١) اعتبر مشكلة البرمجة الخطية التالية:-

$$\text{Min.} Z = 4X_1 + X_2$$
$$\text{S.T.} \quad 3X_1 + X_2 = 3$$
$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 3$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

المطلوب: ١- حول القيد الأول من متساوية إلى متباينات في الشكل ($\geq$).

٢- حل المشكلة بيانياً مع توضيح دالة الهدف عند الحل الأمثل.

٣- كون المشكلة البديلة ثم أوجد الحل الأمثل لها.

٤- اعتبر نقطة الحل الممكن $X_1^0 = 3/5 \; , \; X_2^0 = 6/5$ - كون المشكلة العكسية للمشكلة أعلاه.

٥- أوجد الحل الأمثل للمشكلة العكسية.

(٧-٢) اعتبر مشكلة البرمجة التالية:-

$$\text{Min.} Z = 5X_1 - 6X_2 - 7X_3$$
$$\text{S.T.} \quad X_1 + 5X_2 - 3X_3 \geq 15$$
$$5X_1 - 6X_2 + 10X_3 \leq 20$$
$$X_1 + X_2 + X_3 = 5$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

المطلوب: كون المشكلة العكسية المناظرة للمشكلة أعلاه عند حل ممكن مناسب.

(٧-٣) الجدول التالي يوضح تكلفة نقل الوحدة الواحدة من مراكز الإنتاج A , B , C إلى مراكز الاستهلاك I , II , III كذلك الكميات المتاحة في مراكز الإنتاج والكميات المطلوبة في مراكز الاستهلاك.

جدول (٧-٣)

مراكز الاستهلاك / مراكز الإنتاج	I	II	III	الكميات المتاحة
A	5	7	9	2000
B	7	11	10	5000
C	5	2	7	3000
الكميات المطلوبة	1500	3500	5000	10000

المطلوب: ١- كون نموذج برمجة خطية يمثل المشكلة أعلاه - ثم أوجد الحل الأمثل.

٢- أوجد المشكلة البديلة المناظرة للمشكلة في (١) مع تعريف المتغيرات البديلة في هذه الحالة. ثم أوجد الحل الأمثل لها.

٣- إذا اعتبرنا الحل الممكن

$X_{11}^0 = 2000 \ , \ X_{23}^0 = 5000 \ , \ X_{31}^0 = 2000 \ , \ X_{33}^0 = 1000$

أوجد مقدار التغير في C_{ij} باستخدام أسلوب البرمجة العكسية Inverse Technique.

(٧-٤) الجدول التالي يوضح ثلاثة وظائف A , B , C مطلوب لها ثلاثة عاملين I , II , III والجدول التالي يوضح تكلفة العامل عند كل وظيفة.

جدول (٧-٤)

الوظيفة / العامل	A	B	C
I	1200	5000	3000
II	2500	1700	4000
III	1500	2100	1000

المطلوب: ١- كون نموذج برمجة خطية لمشكلة التخصيص في الجدول أعلاه.

٢- حل النموذج في (١) وأوجد الحل الأمثل.

٣- كون المشكلة البديلة للنموذج في (١) ثم أوجد الحل الأمثل لها.

٤- كون المشكلة العكسية في (١) عند نقطة حل متاح مناسبة.

٥- حدد نسبة التغير في تكلفة العامل، ثم عقب على الناتج.

الباب الثامن

اشتقاق طريقة السمبلكس

Derivation of the Simplex Method

(٨-١) تعريفات — Definitions

(٨-٢) بعض النظريات الأساسية — Some Basic Theorems

(٨-٣) شرط الأمثلية — The Optimality Condition

(٨-٤) شرط الإتاحة (الإمكانية)
The Feasibility Condition

(٨-٥) طريقة السمبلكس المعدلة
The Revised Simplex Method

(٨-٦) التغير في بعض المعلمات
Variations in Some Parameters

(٨-٧) تمرينات — Exercises

(٨-١) تعريفات Definitions

في الباب الثالث تناولنا بالتفصيل الأساليب الحسابية Computational Techniques المختلفة لحل نماذج البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس بدون عرض الأساس الرياضي المبنى عليه طريقة السمبلكس.

وفي هذا الباب سوف نقدم التعريفات الرياضية Mathematical Definitions وكذلك النظريات الأساسية Basic Theorems التي بنيت على أساسها طريقة السمبلكس. حيث أن أشتقاق طريقة السمبلكس يمكننا من دراسة بعض التعديلات لطريقة السمبلكس وكذلك بعض الخوارزميات لبعض الحالات الخاصة وعلى سبيل المثال:-

١. طريقة السمبلكس المعدلة Revised Simplex
٢. خوارزم التجزئ Decomposition Algorithm
٣. خوارزم المتغيرات المحددة Bounded Variables Algorithm
٤. البرمجة المعلمية Parametric Programming
٥. تحليل الحساسية Sensitivity Analysis

<u>تعريف (٨-١)</u>: الاستقلال وعدم الاستقلال الخطى

Linear independence And Dependence

إذا كان لدينا فئة المتجهات $\{P_1, P_2, ..., P_n\}$ في n من المحاور n-dimensional Vectors فإنه يقال أن المتجهات $P_1, P_2, ..., P_n$ غير مستقلة خطياً إذا تحققت المعادلة التالية:

$$C_1P_1 + C_2P_2 + ... + C_nP_n = \underset{\sim}{0} \qquad (8.1)$$

بحيث المتجه $C \neq \underline{0}$، و $\underline{0}$ متجه صفري (أي جميع عناصره أصفار).

كذلك تكون مستقلة خطياً إذا كان:

$$C_1P_1 + C_2P_2 + \dots + C_nP_n \neq \underline{0} \qquad (8.2)$$

بحيث $C \neq \underline{0}$.

<u>مثال (٨-١)</u>: أعتبر المتجهات التالية:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad , \quad P_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad , \quad P_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

فإذا فرضنا أن $C_1 = 2 \ , \ C_2 = 1 \ , \ C_3 = -1$ أختبر الاستقلال الخطي للمتجهات P_1, P_2, P_3 عند قيم C_1, C_2, C_3

$$C_1P_1 + C_2P_2 + C_3P_3 = (2)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + (1)\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2+5-7) \\ (-2+0+2) \\ (6+3-9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وحيث $C \neq \underline{0}$ بالتالي فإن المتجهات P_1, P_2, P_3 متجهات غير مستقلة عند $C_1 = 2 \ , \ C_2 = 1 \ , \ C_3 = -1$

<u>مثال (٨-٢)</u>: أعتبر المتجهات التالية

$$P_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} \quad , \quad P_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \end{bmatrix} \quad , \quad P_3 = \begin{bmatrix} 11 \\ 25 \end{bmatrix}$$

أختبر استقلال المتجهات P_1, P_2, P_3 عندما $C_1 = 3 \ , \ C_2 = 0 \ , \ C_3 = 0$

بما أن

$$C_1P_1 + C_2P_2 + C_3P_3 = 3\begin{bmatrix}5\\8\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}3\\-8\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}11\\25\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}15\\24\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}15\\24\end{bmatrix} \neq 0$$

إذن المتجهات P_1, P_2, P_3 مستقلة خطياً.

تعريف (٨-٢): الحلول الأساسية Basic Solutions

إذا اعتبرنا نموذج برمجة خطية يتضمن عدد r من المتغيرات (القرارية والمكملة) في عدد m من القيود الهيكلية بحيث المصفوفة A التي تمثل معاملات المتغيرات في القيود الهيكلية على النحو :

$$A = (P_1, P_2, \ldots P_r) \qquad (8.3)$$

$$AX = P_0 \qquad (8.4)$$

فأنه بوضع عدد (r-m) من المتغيرات كل منها يساوى صفر أي عدد (r-m) من المتجهات في (8.2) تصبح متجهات صفرية، فإنه يمكن حل نظام المعادلات (8.4) حيث عدد المجاهيل (المتغيرات الداخلة في الحل والتي تسمى المتغيرات الأساسية (Basic Variables) يساوى m في عدد m من المعادلات ويكون هذا الحل حل وحيد Unique Solution إذا وإذا فقط المتجهات المناظرة للمتغيرات الأساسية تكون مستقلة خطياً Linearly Independent أو بعبارة أخرى تكون المصفوفة المربعة الممثلة لمتغيرات المتجهات الأساسية في A تكون مصفوفة غير شاذة Nonsingular Matrix ويسمى حل المعادلات في هذه الحالة بحل أساسي.

وبناءً على ذلك يكون لدينا عدد $C^{r}_{(r-m)}$ من الحلول الأساسية (بعضها يكون ممكن عندما $X \geq 0$، وبعضها غير ممكن عندما لا يتحقق الشرط $X \geq 0$) كما ذكرنا سابقاً في الباب الثالث الفصل (٣-٣).

ملحوظة: وتعتبر كل نقطة تمثل أحد الحلول الأساسية تمثل نقطة طرفية **Extreme Point**.

مثال (٨-٣): إذا اعتبرنا نموذج البرمجة الخطية على النحو التالي

$$
\begin{aligned}
&Max.Z = 3X_1 + 5X_2 \\
&S.T.\quad 4X_1 + 3X_2 + X_3 = 12 \\
&\qquad\quad 3X_1 + 6X_2 + X_4 = 18 \\
&\qquad\quad X_1, X_2, X_3 X_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

حيث X_3, X_4 متغيرات مكملة.

في هذا النموذج نجد أن $r = 4$ ، $m = 2$ بالتالي فإن عدد الحلول الأساسية يساوي $C^{r}_{(r-m)}$ حيث

$$C^{r}_{(r-m)} = C^{4}_{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6 \quad \text{حلول أساسية}$$

فنجد أن مصفوفة المتجهات لكل حل أساسي مصفوفات غير شاذة (أو بعبارة أخرى المتجهات مستقلة) على النحو التالي:

١. إذا كان X_1, X_2 المتغيرات الأساسية فإن:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow |A_1| \neq 0$$

٢. إذا كان X_1, X_3 المتغيرات الأساسية فإن:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow |A_2| \neq 0$$

٣. إذا كان X_1, X_4 المتغيرات الأساسية فإن:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow |A_3| \neq 0$$

٤. إذا كان X_2, X_3 المتغيرات الأساسية فإن:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow |A_4| \neq 0$$

٥. إذا كان X_2, X_4 المتغيرات الأساسية فإن:

$$A_5 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow |A_5| \neq 0$$

٦. إذا كان X_3, X_4 المتغيرات الأساسية فإن:

$$A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow |A_6| \neq 0$$

تعريف (٨-٣): التوليفة المحدبة Convex Combination

إذا فرضنا وجود عدد K من النقط المختلفة في n من المحاور n-dimensions بحيث:

$$X^{(i)} = (X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \ldots, X_n^{(i)}) \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, K$$

فإذا اعتبرنا النقطة X^* بحيث :

$$X^* = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i X^{(i)} \qquad (8.5)$$

$$0 \le \lambda_i \le 1 \quad , \quad \sum_{i=1}^{K} \lambda_i = 1$$

فأن النقطة X^* تسمى توليفة خطية محدبة **Linear Convex Combination**

<u>مثال (٨-٤)</u>: إذا اعتبرنا النقاط التالية

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad X^{(2)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad , \quad X^{(3)} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

فإذا كان $\lambda_1 = 0.2 ,\ \lambda_2 = 0.5 ,\ \lambda_3 = 0.3$ فإن النقطة $X^{(4)}$ حيث:

$$X^{(4)} = \begin{bmatrix} X_1^{(4)} \\ X_2^{(4)} \\ X_3^{(4)} \end{bmatrix} = 0.2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0.5 \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + 0.3 \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.8 \\ 1.4 \\ 2.2 \end{bmatrix}$$

تمثل توليفه خطية محدبة.

<u>مثال (٨-٥)</u>: أثبت أن المتجه $[0,7]^T$ يمثل توليفة محدبة للفئة:

$$\left\{ [3,6]^T, [-6,9]^T, [2,1]^T, [-1,1]^T \right\}$$

الحل: إذا فرضنا أن $[0,7]^T$ يمثل توليفة محدبة فإن:

$$\begin{bmatrix}0\\7\end{bmatrix}=\alpha_1\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}-6\\9\end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+\alpha_4\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

$$3\alpha_1-6\alpha_2+2\alpha_3-\alpha_4=0 \qquad (1)$$

$$6\alpha_1+9\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7 \qquad (2)$$

$$\because \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=1 \qquad (3)$$

فإنه يمكن حل المعادلات (3)-(1) بوضع $\alpha_4=0$ مثلاً فإن:

$$\left.\begin{array}{l}3\alpha_1-6\alpha_2+2\alpha_3=0\\6\alpha_1+9\alpha_2+\alpha_3=7\\\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1\end{array}\right\} \qquad (4)$$

وبحل المعادلات (4) نجد أن:

$$\alpha_4=0\longrightarrow\alpha_1=\frac{2}{3}\ ,\ \alpha_2=\frac{1}{3}\ ,\ \alpha_3=0$$

وبالتالي فإن $[0\,,7]^T$ يمثل توليفة محدبة.

<u>تعريف (٨-٤)</u>: الفئة المحدبة Convex Set

إذا كانت الفئة C معرفه في n محور فأنه يقال أن الفئة C فئة محدبة إذا كانت كل نقطة تقع على الخط الواصل بين أي نقطتين مختلفتين في C تقع في الفئة C أيضاً. ويمكن تعريف ذلك رياضياً على النحو التالي:

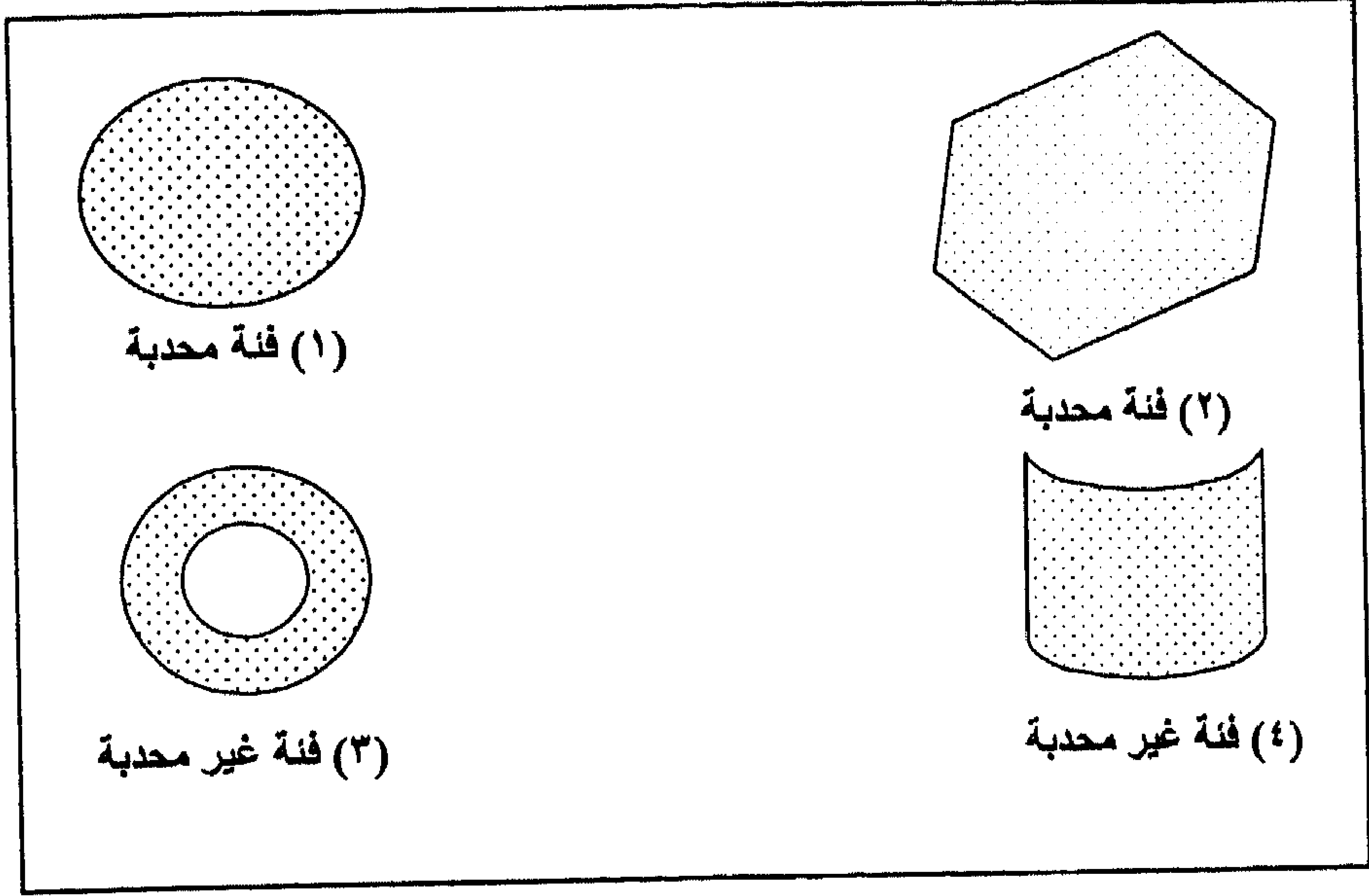
إذا اعتبرنا X^* توليفة خطية محدبة حيث:

$$X^*=\lambda X^{(1)}+(1-\lambda)X^{(2)}\quad ,\quad 0\le\lambda\le1 \qquad (8.6)$$

فإذا كان النقطتين $X^{(1)},X^{(2)}$ في الفئة C فإن X^* تكون في الفئة C أيضاً.

والأشكال التالية توضح الفئات المحدبة وغير المحدبة:

شكل (٨-١)



تعريف (٨-٥): الصيغة القياسية Standard Form لنموذج البرمجة الخطية في صورة مصفوفات

يمكن كتابة نموذج البرمجة الخطية في صورة مصفوفات على النحو التالي:

$$\text{Max(or Min.)} Z = CX \qquad (8.7)$$

$$\text{S.T.} \quad (A,I)X = P_0 \quad , \quad P_0 \geq 0 \qquad (8.8)$$

$$X \geq 0 \qquad (8.9)$$

حيث المتجه X يمثل جميع المتغيرات (القرارية، المكملة، المصطنعة إن وجدت) أي أن:

$$X = [X_1, X_2, ..., X_{m+n}]^T$$

$$C = [c_1, c_2, \dots, c_{m+n}]$$

$$P_0 = [b_1, b_2, \dots, b_m]$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

وبالتالي يمكن إعادة كتابة القيود في صورة مصفوفات على النحو التالي:

$$(A, I)X = P_0$$

حيث:

$$\sum_{j=1}^{m+n} X_j P_j = P_0$$

حيث P_j متجه رقم (j) في المصفوفة (A, I)، حيث I تشير إلى مصفوفة الوحدة.

<u>مثال (٨-٦)</u>: أعتبر نموذج البرمجة الخطية التالي

$$\text{Max.}Z = 5X_1 + 3X_2$$

$$\begin{aligned} \text{S.T.} \quad & 7X_1 + 3X_2 \geq 21 && (1) \\ & 4X_1 + 7X_2 = 28 && (2) \\ & 9X_1 + 5X_2 \leq 45 && (3) \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ضع النموذج السابق في الصورة القياسية ثم ضعه في شكل مصفوفات.

الحل:

١- نضع أولا النموذج في الصورة القياسية بإضافة المتغيرات المكملة والمصطنعة على النحو التالي:

$$\begin{aligned} Max.Z &= 5X_1 + 3X_2 + 0X_3 - MX_4 - MX_5 + 0X_6 \\ S.T.\quad & 7X_1 + 3X_2 - X_3 + X_4 = 21 \\ & 4X_1 + 7X_2 + X_5 = 28 \\ & 9X_1 + 5X_2 + X_6 = 45 \\ & X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \ge 0 \end{aligned}$$

حيث المتغيرات X_3, X_6 متغيرات مكملة، X_4, X_5 متغيرات مصطنعة.

وبالتالي فإن:

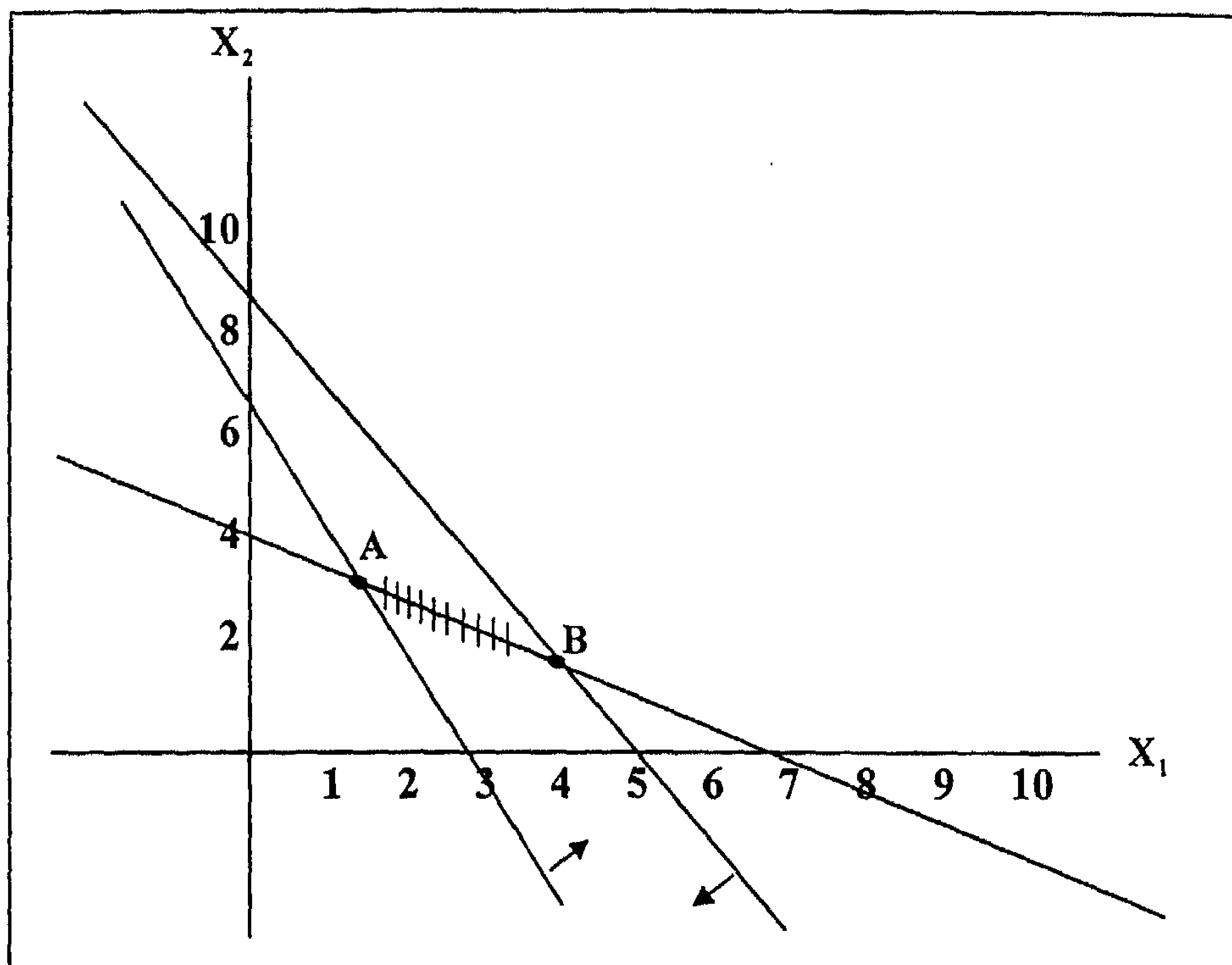
$$X = [X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6]^T$$

$$C = [5,3,0,-M,-M,0]$$

$$(A,I) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$P_0 = [21,28,45]^T$$

شكل (٨-٢)



<u>ملحوظة</u>: في شكل (٨-٢) نجد أن فئة الحلول الممكنة هي جميع النقط الواقعة على الخط AB ونجد أن النقط الطرفية هنا هي النقطتين B , A.

(٨-٢) بعض النظريات الأساسية Some Basic Theorems

في هذا الفصل سوف نقدم أهم النظريات التي بنيت عليها طريقة السمبلكس Simplex Method.

نظرية (٨-١): فئة الحلول الممكنة لنظام القيود الخطية $(A,I)X = P_0$ ، $X \geq 0$ والتي نشير لها بالرمز Q (فئة غير خالية unempty Set)، فإن Q فئة محدبة Convex Set (أنظر تعريف (٨-٤)).

الإثبات: بما أن الفئة Q هي الفئة التي تحقق القيود الهيكلية $(A,I)X = P_0$، وقيود عدم السالبية $X \geq 0$. فإذا فرضنا النقطتين (أي المتجهين) X_1, X_2 بحيث $X_1, X_2 \in Q$ ، $X_1, X_2 \geq 0$ فإن:

$$(A,I)\,X_1 = P_0 \quad , \quad (A,I)\,X_2 = P_0 \qquad (8.10)$$

وإذا فرضنا أن النقطة X تمثل أي توليفة خطية محدبة any linear convex combination في X_1, X_2، بالتالي فإن:

$$X = (1-\lambda)\,X_1 + \lambda\,X_2 \quad , \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \qquad (8.11)$$

فإن:

$$X \geq 0 \qquad (8.12)$$

وبضرب طرفي المعادلة (8.11) في المصفوفة (A,I) نجد أن:

$$(A,I)\,X = (A,I)\,(1-\lambda)\,X_1 + (A,I)\,\lambda\,X_2$$
$$= (A,I)\,X_1 - \lambda(A,I)\,X_1 + \lambda(A,I)\,X_2$$
$$= P_0 - \lambda\,P_0 + \lambda\,P_0 = P_0 \qquad (8.13)$$

من (8.13) , (8.12) نجد أن النقطة X نقطة حل ممكن أيضاً للنظام $(A,I)\,X = P_0$ ، $X \geq 0$ أي $X \in Q$ (من تعريف (٨-٤)) وبالتالي فإن Q فئة محدبة [44].

نظرية (٨-٢): أي حل أساسي ممكن للنظام $(A,I)X = P_0$ ، $X \geq 0$ يمثل نقطة طرفية ممكنة لفئة الحلول الممكنة Q. أو بعبارة أخرى، إذا كانت فئة المتجهات المناظرة للمتغيرات الأساسية $\{P_1, P_2, ..., P_m\}$ فإنها تمثل متجهات مستقلة خطياً، أي تحقق العلاقة التالية:

$$\alpha_1\,P_1 + \alpha_2\,P_2 + ... + \alpha_m\,P_m = P_0 \qquad (8.14)$$

حيث $P_0 \neq \underline{0} \quad , \quad 0 \leq \alpha_j \leq 1 \quad , \quad j = 1, 2, ..., m$

(أنظر تعريف (٨-١)).

الإثبات: إذا فرضنا أن الحل الأساسي الممكن بالرمز X^* ، $X^* \in Q$. فإذا فرضنا أن X^* ليست نقطة طرفية Extreme Point فإنه يمكن وضع X^* كتوليفة خطية محدبة في النقطتين المختلفتين X_1, X_2 ، $X_1, X_2 \in Q$ بحيث أن X^* نقطة تختلف عن كل من X_1, X_2.

$$\because X^* \in Q \longrightarrow X^* = \lambda\,X_1 + (1-\lambda)\,X_2 \quad , \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \qquad (8.15)$$

بضرب طرفي المعادلة (8.15) في المصفوفة (A,I) نجد أن:

$$\begin{aligned}(A,I)\,X^* &= \lambda(A,I)\,X_1 + (1-\lambda)(A,I)\,X_2 \\ &= \lambda(A,I)\,X_1 + (A,I)\,X_2 - \lambda(A,I)\,X_2 \\ &= \lambda\,P_0 + (A,I)\,X_2 - \lambda\,P_0\end{aligned}$$

$$(A,I)\,X^* = (A,I)\,X_2 \qquad (8.16)$$

من المعادلة (8.16) نجد أن $X^* = X_2$ وهذا يخالف افتراض أن X^* تختلف عن كل من X_1, X_2 وبالتالي فإن X^* لا يمكن التعبير عنها في صورة توليفة خطية، وبالتالي فإن X^* تمثل نقطة طرفية للفئة المحدبة Q.

نظرية (٨-٣): إذا اعتبرنا نموذج البرمجة الخطية:

$$\text{Max. } f(X) = CX \qquad (8.17)$$

$$\text{S.T.} \quad (A,I)X = P_0 \;\;,\;\; X \geq 0 \qquad (8.18)$$

بحيث فئة الحلول الممكنة Q فئة غير خالية Unempty ومحـــددة Bounded ، والدالة $f(X)$ دالة منتهية finite ، فإن الحل الأمثل للنمـــوذج (8.18)-(8.17) يكون أحد النقط الطرفية Extreme Points للفئة Q.

الإثبـــات: إذا فرضـــنا أن الـــنقط الطرفيـــة للفئـــة Q (Q فئـــة محدبـــة) هـــي $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(m)}$.

وبما أن Q فئة محدبة، فإن أي نقطة في الفئة Q يمكن التعبير عنها في صـــورة توليفة خطية في $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(m)}$.

إذا فرضنا $X_{(0)} \in Q$ بحيث القيمة $f(X_{(0)})$ نهاية عظمى [44, Page66].

فإنه يمكن التعبير عن النقطة $X_{(0)}$ كتوليفة خطية في $X_{(r)}$ إذا كانت النقطة $X_{(0)}$ نقطة غير طرفية على النحو التالي:

$$X_{(0)} = \sum_{r=1}^{m} \alpha_r X_{(r)} \quad , \quad \alpha_r \geq 0 \quad , \quad \sum_{r=1}^{m} \alpha_r = 1 \qquad (8.19)$$

وبما أن الدالة $f(X)$ دالة خطية في X بالتالي فإن:

$$f(X_{(0)}) = f\left[\sum_{r=1}^{m} \alpha_r X_{(r)}\right] = \sum_{r=1}^{m} \alpha_r f(X_{(r)}) \qquad (8.20)$$

فإذا فرضنا أن $f(X_{(k)})$ أكبر قيمة في قيم $f(X)$ عند النقطة الطرفية $X_{(k)}$، $1 \leq r \leq m$ أي أن:

$$f(X_{(k)}) \geq Max.\ \{f(X_{(1)}), f(X_{(2)}), ..., f(X_{(m)})\} \qquad (8.21)$$

من (8.21) , (8.20) نجد أن:

$$f(X_{(0)}) = \sum_{r=1}^{m} \alpha_r f(X_{(r)}) \leq f(X_{(k)}) \qquad (8.22)$$

من (8.22) كذلك من افتراض أن الدالة $f(X)$ تكون نهاية عظمى عند $X_{(0)}$ بالتالي فإن:

$$f(X_{(0)}) = f(X_{(k)})$$

أي أن $X_{(0)} = X_{(k)}$ أي النقطة $X_{(0)}$ نقطة طرفية للفئة Q.

بنفس الطريقة يمكن الإثبات في حالة $Min.\ f(X)$.

(٨-٣) شرط الأمثلية The Optimality Condition

وكما ذكرنا سابقا في الباب الثالث أن كفاءة طريقة السمبلكس ترجع إلى أن عملية الانتقال من حل أساسي ممكن يكون إلى نقطة حل أساسي ممكن أفضل من الحل السابق له.

ومن هنا كانت عبقرية عالم الرياضيات Dantzig سنة ١٩٤٧ في كيفية تعبيره عن المتغيرات الأساسية الداخلة في الحل بدلالة المتغيرات غير الأساسية كما سوف نوضح فيما يلي وبالتالي تحديد أفضل متغير غير أساسي يمكن أن يدخل في الحل بحيث يكون تأثيره على دالة الهدف أفضل من أي متغير أخر غير أساسي. وفيما يلي سوف نحدد كيفية تحديد المتغير غير الأساسي الذي يتم إدخاله في الحل التالي.

إذا فرضنا أن نموذج البرمجة الخطية على النحو التالي:

$$\text{Max.}Z = CX \qquad (8.23)$$

$$\text{S.T.} \quad (A,I)X = P_0 \qquad (8.24)$$

$$X \geq 0 \qquad (8.25)$$

حيث يشتمل المتجه X جميع المتغيرات (القرارية ، المكملة ، المصطنعة) فإنه يمكن أعادة كتابة القيود في (8.24) على النحو التالي:

$$B\,X_B + N\,X_N = P_0 \qquad (8.26)$$

حيث تم تقسيم المتجه X إلى المتجهين X_B, X_N حيث X_B تشير إلى متجه المتغيرات الأساسية الداخلة في الحل، كذلك يشير X_N إلى متجه المتغيرات غير الأساسية. كذلك تم تقسيم المصفوفة (A,I) إلى المصفوفتان B,N حيث تمثل

المصفوفة B معاملات المتغيرات الأساسية في القيود (8.24)، كذلك تمثل المصفوفة N معاملات المتغيرات غير الأساسية في القيود (8.24) أيضاً. ومن المعادلة (8.26) نجد أن

$$X_B = B^{-1}P_0 - B^{-1}NX_N \qquad (8.27)$$

حيث تشير B^{-1} إلى معكوس المصفوفة B (أنظر ملحق رقم A).

وفي أي مرحلة للحل نجد أن متجه المتغيرات غير الأساسية متجه صفري (لعدم وجود هذه المتغيرات في الحل) وبالتالي من (8.27) نجد أن:

$$X_B = B^{-1}P_0 \qquad (8.28)$$

وبما أن:

$$Z = C_B X_B + C_N X_N \qquad (8.29)$$

بالتعويض بـ (8.27) في (8.29) أي التعبير عن دالة الهدف بدلالة المتغيرات غير الأساسية نجد أن

$$\begin{aligned} Z &= C_B(B^{-1}P_0 - B^{-1}NX_N) + C_N X_N \\ &= C_B B^{-1}P_0 - (C_B B^{-1}N - C_N)X_N \qquad (8.30) \end{aligned}$$

ويمكن أعادة كتابة المعادلة (8.30) على النحو التالي:

$$Z = C_B B^{-1}P_0 - \sum_{j=1}^{n}(C_B B^{-1}P_j - C_j)X_j \qquad (8.31)$$

حيث تشير j إلى المتغيرات غير الأساسية كذلك P_j يشير إلى متجه معاملات المتغير غير الأساسي X_j في المصفوفة (A,I). وإذا فرضنا أن:

$$Z_j = C_B B^{-1}P_j \qquad (8.32)$$

بالتعويض في (8.30) بـ (8.32) نجد أن:

$$Z = C_B B^{-1} P_0 - \sum_{j=1}^{n} (Z_j - C_j) X_j \qquad (8.33)$$

والعلاقة (8.33) توضح:

أ- أن قيمة دالة الهدف في الحل الحالي على النحو التالي:

$$Z = C_B B^{-1} P_0 \qquad (8.34)$$

ب-من العلاقة (8.33) نجد أن أقل قيمة بالسالب لمعاملات المتغيرات غير الأساسية $j = 1,2,...,n$ ، $(Z_j - C_j)$ يعتبر أفضل متغير يمكن إدخاله في الحل الأساسي التالي لأنه سوف يكون أفضل متغير داخل لتحسين قيمة دالة الهدف.

ج- عندما تكون جميع معاملات المتغيرات غير الأساسية $(Z_j - C_j)$قيم غير سالبة، فإن هذا يعنى أن أي متغير من المتغيرات غير الأساسية إذا فرضنا دخوله في الحل لا يؤدى إلى تحسين قيمة دالة الهدف - وبهذا يعتبر الحل الحالي هو الحل الأمثل.

وفيما يلي سوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي:

<u>مثال (٨-٧)</u>: أعتبر المثال السابق (٨-٦) فنجد أن نقطة الحل المبدئي:

$$X_B = [X_4, X_5, X_6]^T \quad , \quad X_N = [X_1, X_2, X_3]$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad N = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 4 & 7 & 0 \\ 9 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_0 = [21, 28, 45]^T$$

$$C_B = [-M, -M, 0] \quad , \quad C_N = [5 \quad 3 \quad 0]$$

وفي هذه الحالة يكون الحل الحالي:

$$X_B = B^{-1}P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ 28 \\ 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 28 \\ 45 \end{bmatrix}$$

$$Z = C_B B^{-1} P_0 = [-M, -M, 0]_{1.3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3.3} \begin{bmatrix} 21 \\ 28 \\ 45 \end{bmatrix}_{3.1}$$

$$= [-M, -M, 0] \begin{bmatrix} 21 \\ 28 \\ 45 \end{bmatrix} = -49M$$

فإذا تم التعبير عن دالة الهدف Z بدلالة المتغيرات غير الأساسية (أنظر المعادلة (8.31)) حيث:

$$Z = C_B B^{-1} P_0 - \sum_j (C_B B^{-1} P_j - C_j) X_j$$

فبحساب معامل X_j لجميع المتغيرات غير الأساسية نجد أن:

$$Z_1 - C_1 = C_B B^{-1} P_1 - C_1$$

$$= [-M, -M, 0]_{1.3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3.3} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} - 5$$

$$= [-M, -M, 0] \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} - 5$$

$$= -7M - 4M + 0 - 5 = -11M - 5$$

$$Z_2 - C_2 = C_B B^{-1} P_2 - C_2$$

$$= [-M, -M, 0]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\7\\5\end{bmatrix} - 3$$

$$= [-M, -M, 0]\begin{bmatrix}3\\7\\5\end{bmatrix} - 3 = -10M - 3$$

$$Z_3 - C_3 = [-M, -M, 0]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix} - 0$$

$$= M - 0 = M$$

أي أن:

$$[(Z_1 - C_1), (Z_2 - C_2), (Z_3 - C_3)] = [(-11M - 5), (-10M - 3), M]$$

وبما أن أقل قيمة سالبة تساوى $(-11M - 5)$ وهى المناظرة للمتغير X_1 بالتالي فإن المتغير X_1 هو المتغير الداخل في نقطة الحل التالية.

(٨-٤) شرط الإتاحة (الإمكانية)

The Feasibility Condition

ولتحديد المتغير الخارج في أي مرحلة من مراحل الحل لابد أن يتوافر فيه ما يلي:-

أ- أن يكون المتغير الخارج متغير غير سالب وهذا الشرط بالنسبة للمتغيرات الأساسية وغير الأساسية.

ب- المتغير الخارج سوف يصبح متغير غير أساسي وبالتالي سوف تصبح قيمته تساوى صفر.

وفيما يلي سوف نقدم اشتقاق شرط الإتاحة (الإمكانية) بالنسبة للمتغير الخارج في أي مرحلة من مراحل الحل.

من العلاقة (8.26) يمكن كتابة القيود الهيكلية على النحو:

$$B\,X_B + N\,X_N = P_0 \longrightarrow X_B = B^{-1}P_0 - B^{-1}N\,X_N$$

فإذا كان المتغير X_j هو المتغير الداخل من المتغيرات غير الأساسية X_N وبالتالي يمكن أعادة كتابة المتغيرات الأساسية على النحو:

$$X_B = B^{-1}P_0 - (B^{-1}P_j)X_j \qquad (8.35)$$

فإذا أشرنا إلى المتغير الخارج من المتغيرات الأساسية بالرمز $(X_B)_i$، حيث $i = 1,2,..,m$.

وبما أن جميع المتغيرات سواء أساسية أو غير أساسية متغيرات غير سالبة بالتالي فإن:

$$(X_B)_i = (B^{-1}P_0)_i - (B^{-1}P_j)X_j \geq 0 \qquad (8.36)$$

لجميع قيم i كذلك $X_j \geq 0$

وبالتالي يمكن إعادة كتابة العلاقة (8.36) على النحو التالي:

$$0 \leq X_j \leq \frac{(B^{-1}P_0)_i}{(B^{-1}P_j)_i} \qquad (8.37)$$

وبحيث $(B^{-1}P_j)_i > 0$ لجميع قيم i.

ونظراً لأن المتغير الخارج $(X_B)_i$ سوف تؤول قيمته إلى الصفر، كذلك نظراً لأن المتغير الداخل X_j سوف يحل محل المتغير الخارج. لذا يجب أن تكون قيمة المتغير الداخل تمثل أقل قيمة في القيم:

$$\frac{(B^{-1}P_0)_i}{(B^{-1}P_j)_i} \quad , \quad i = 1,2,..m \qquad (8.38)$$

وبالتالي يمكن كتابة ذلك على النحو التالي:

$$X_j = \underset{i}{Min}\left\{\frac{(B^{-1}P_0)_i}{(B^{-1}P_j)_i} \middle| (B^{-1}P_j) > 0\right\} \qquad (8.39)$$

$$= \frac{(B^{-1}P_0)_r}{\alpha_r^j}$$

حيث α_r^j تشير إلى العنصر رقم r المناظر للمتغيرات غير الأساسية في المتجه α^j حيث:

$$\alpha^j = B^{-1}P_j$$

وسوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي:

مثال (٨-٨): أعتبر مثال (٨-٧) فإنه تم تحديد المتغير الداخل X_1 وبالتالي لتحديد المتغير الخارج نتبع الخطوات التالية:

١. نحسب المتجه $B^{-1}P_1$ على النحو التالي:

$$B^{-1}P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3.3} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}_{3.1} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

٢. وبما أن:

$$B^{-1}P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ 28 \\ 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 28 \\ 45 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

من (2) ، (1) نجد أن:

$$\frac{B^{-1}P_0}{B^{-1}P_1} = \begin{bmatrix} \overset{X_4}{\frac{21}{7}} & , & \overset{X_5}{\frac{28}{4}} & , & \overset{X_6}{\frac{45}{9}} \end{bmatrix} = [\overset{\downarrow}{3} \ , 7 \ , \ 5] \qquad (3)$$

نجد أن أقل نسبة مناظرة للمتغير الأساسي X_4 بالتالي فإن X_4 هو المتغير الخارج ويحل محله المتغير X_1 هو المتغير الداخل.

٣. وننتقل إلى حل أساسي آخر:

١- تكون المتغيرات الأساسية وغير الأساسية على النحو:

$$X_B = [X_1, X_5, X_6]^T \quad , \quad X_N = [X_4, X_2, X_3]$$

وبالتالي فإن:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_B = [5, -M, 0] \quad , \quad C_N = [-M, 3, 0]$$

٢- وبإيجاد معكوس المصفوفة B أي B^{-1} حيث (أنظر ملحق رقم A):

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ -4/7 & 1 & 0 \\ -9/7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

٣- لتحديد المتغير الداخل نحسب $(Z_j - C_j)$ على النحو التالي:-

$$Z_4 - C_4 = C_B B^{-1} P_4 - C_4$$

$$= [5, -M, 0] \begin{bmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ -4/7 & 1 & 0 \\ -9/7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + M$$

$$= \left[\frac{(5+4M)}{7}, -M, 0 \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + M$$

$$= \frac{(5+4M)}{7} + M$$

$$= \left(\frac{5+11M}{7} \right)$$

$$Z_2 - C_2 = [5, -M, 0]\begin{bmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ -4/7 & 1 & 0 \\ -9/7 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} - 3$$

$$= \left[\frac{(5+4M)}{7}, -M, 0\right]\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} - 3 = -\left(\frac{6+37M}{7}\right)$$

$$Z_3 - C_3 = [5, -M, 0]\begin{bmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ -4/7 & 1 & 0 \\ -9/7 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0$$

$$= \left[\frac{(5+4M)}{7}, -M, 0\right]\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -\left(\frac{(5+4M)}{7}\right)$$

من قيم $(Z_j - C_j)$ السابقة نجد أن المتغير الداخل X_2. ولتحديد المتغير الخارج نحسب كل من $B^{-1}P_2$ ، $B^{-1}P_0$ على النحو التالي:-

$$B^{-1}P_2 = \begin{bmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ -4/7 & 1 & 0 \\ -9/7 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 37/7 \\ 8/7 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}P_0 = \begin{bmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ -4/7 & 1 & 0 \\ -9/7 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 21 \\ 28 \\ 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 16 \\ 18 \end{bmatrix}$$

نحسب:

$$\frac{B^{-1}P_0}{B^{-1}P_2} = \begin{matrix} x_1 & x_5 & x_6 \\ [7 & 3.03 & 15.75] \end{matrix}$$

وبالتالي فإن X_5 هو المتغير الخارج حيث أن 3.03 تقترب من الصفر أسرع من 7 أو 15.75.

٤. وننتقل لحل أساسي آخر تكون المتغيرات الأساسية فيه هي X_1, X_2, X_6 وبالتالي فإن:

$$X_B = [X_1, X_2, X_6] \quad , \quad X_N = [X_4, X_5, X_3]$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \\ 9 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_B = [5, 3, 0] \quad , \quad C_N = [-M, -M, 0]$$

$$B_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{37} & \frac{-3}{37} & 0 \\ \frac{-4}{37} & \frac{7}{37} & 0 \\ \frac{-43}{37} & \frac{-8}{37} & 1 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

نحدد المتغير الداخل من خلال حساب $(Z_j - C_j)$ للمتغيرات غير الأساسية على النحو التالي:

$$(Z_4 - C_4) = C_B B^{-1} P_4 - C_4$$

$$= [5, 3, 0] \begin{bmatrix} \frac{7}{37} & \frac{-3}{37} & 0 \\ \frac{-4}{37} & \frac{7}{37} & 0 \\ \frac{-43}{37} & \frac{-8}{37} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - (-M)$$

$$=\left[\frac{23}{37},\frac{6}{37},0\right]\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+M=\left(\frac{23}{37}+M\right)$$

$$(Z_5-C_5)=[5,3,0]\begin{bmatrix}\frac{7}{37} & \frac{-3}{37} & 0\\ \frac{-4}{37} & \frac{7}{37} & 0\\ \frac{-43}{37} & \frac{-8}{37} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}-(-M)$$

$$=\left[\frac{23}{37},\frac{6}{37},0\right]\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+M=\left(\frac{6}{37}+M\right)$$

$$(Z_3-C_3)=[5,3,0]\begin{bmatrix}\frac{7}{37} & \frac{-3}{37} & 0\\ \frac{-4}{37} & \frac{7}{37} & 0\\ \frac{-43}{37} & \frac{-8}{37} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}-0$$

$$=\left[\frac{23}{37},\frac{6}{37},0\right]\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}-0=\left(\frac{-23}{37}\right)$$

من قيم (Z_j-C_j) السابقة نجد أن المتغير الداخل هو X_3. ولتحديد المتغير الخارج نحسب كل من $B^{-1}P_3$ ، $B^{-1}P_0$ على النحو التالي:-

$$B^{-1}P_3 = \begin{bmatrix} \frac{7}{37} & \frac{-3}{37} & 0 \\ \frac{-4}{37} & \frac{7}{37} & 0 \\ \frac{-43}{37} & \frac{-8}{37} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-7}{37} \\ \frac{4}{37} \\ \frac{43}{37} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}P_0 = \begin{bmatrix} \frac{7}{37} & \frac{-3}{37} & 0 \\ \frac{-4}{37} & \frac{7}{37} & 0 \\ \frac{-43}{37} & \frac{-8}{37} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ 28 \\ 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{63}{37} \\ \frac{112}{37} \\ \frac{538}{37} \end{bmatrix}$$

نحسب:

$$\frac{B^{-1}P_0}{B^{-1}P_3} = [\overset{X_1}{-}, \quad \overset{X_2}{\frac{112}{4}}, \quad \overset{X_6}{\frac{538}{43}}]$$

$$= [- \ , \ 28 \ , \ 12.51]$$

ومن العلاقة السابقة نجد أن المتغير الخارج هو X_6 الذي يحل محله المتغير X_3.

٥. وننتقل إلى نقطة حل أخرى تكون المتغيرات الأساسية فيها هي X_B وغير الأساسية X_N على النحو التالي:

$$X_B = [X_1, X_2, X_3] \qquad , \qquad X_N = [X_4, X_5, X_6]$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 4 & 7 & 0 \\ 9 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_B = [5, 3, 0] \quad , \quad C_N = [-M, -M, 0]$$

$$B_3^{-1} = \frac{1}{43}\begin{bmatrix} 0 & -5 & 7 \\ 0 & 9 & -4 \\ -43 & -8 & 37 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-5}{43} & \frac{7}{43} \\ 0 & \frac{9}{43} & \frac{-4}{43} \\ -1 & \frac{-8}{43} & \frac{37}{43} \end{bmatrix} \quad (6)$$

وبالنسبة للمتغيرات غير الأساسية X_4, X_5, X_6 فإننا سوف نقوم بحساب $(Z_j - C_j)$:

$$(Z_4 - C_4) = C_B B^{-1} P_4 - C_4$$

$$= [5, 3, 0]\begin{bmatrix} 0 & \frac{-5}{43} & \frac{7}{43} \\ 0 & \frac{9}{43} & \frac{-4}{43} \\ -1 & \frac{-8}{43} & \frac{37}{43} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - (-M)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{43} & \frac{23}{43} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + M = 0 + M = M$$

$$(Z_5 - C_5) = [5, 3, 0]\begin{bmatrix} 0 & \frac{-5}{43} & \frac{7}{43} \\ 0 & \frac{9}{43} & \frac{-4}{43} \\ -1 & \frac{-8}{43} & \frac{37}{43} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - (-M)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{43} & \frac{23}{43} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + M = \left(\frac{2}{43} + M\right)$$

$$(Z_6 - C_6) = [5, 3, 0]\begin{bmatrix} 0 & \frac{-5}{43} & \frac{7}{43} \\ 0 & \frac{9}{43} & \frac{-4}{43} \\ -1 & \frac{-8}{43} & \frac{37}{43} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{43} & \frac{23}{43} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = \left(\frac{23}{43}\right)$$

وبما أن جميع قيم $(Z_j - C_j)$ للمتغيرات غير الأساسية غير سالبة بالتـــالي فإننا وصلنا للحل الأمثل حيث:

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}P_0 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-5}{43} & \frac{7}{43} \\ 0 & \frac{9}{43} & \frac{-4}{43} \\ -1 & \frac{-8}{43} & \frac{37}{43} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 21 \\ 28 \\ 45 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 91/43 \\ 77/43 \\ 678/43 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.07 \\ 1.67 \\ 12.5 \end{bmatrix}$$

$$Z^* = C_B\, B^{-1} P_0 = [5 \quad 3 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & \frac{-5}{43} & \frac{7}{43} \\ 0 & \frac{9}{43} & \frac{-4}{43} \\ -1 & \frac{-8}{43} & \frac{37}{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ 28 \\ 45 \end{bmatrix}$$

$$= [0 \quad 2/43 \quad 23/43] \begin{bmatrix} 21 \\ 28 \\ 45 \end{bmatrix} = 25.37$$

<u>ملحوظة</u>: سبق تقديم هذا المثال في الباب الثالث، مثال (٣-١٢) وحله باستخدام أسلوب M عن طريق الجداول – ويمكننا مقارنة خطوات الحل في هذا المثال باستخدام شرطي الأمثلية والإتاحة عن طريق المصفوفات بالخطوات عن طريق الجداول في مثال (٣-١٢) نجد أن النتائج في الانتقال من حل إلى حل آخر أفضل متطابقة.

<u>خوارزم (٨-١)</u>: يمكن تلخيص خطوات الحل المتتالية لمشكلة البرمجة الخطية بتطبيق شرطي الأمثلية والإتاحة بعد صياغة المشكلة في الصياغة المعيارية ووضعها في صورة مصفوفات على النحو التالي:

الخطوة (١): في نقطة الحل المبدئية يتم تحديد المتغيرات الأساسية X_B من المتغيرات المكملة أو المكملة والمصطنعة معاً كذلك تحديد المتغيرات غير الأساسية X_N وتحديد كل من المصفوفات التالية:

$$C_B, C_N, N, B \longrightarrow B^{-1}$$

ثم حساب كل من $X_B = B^{-1}P_0$, $Z = C_B B^{-1}P_0$

وللانتقال من نقطة الحل إلى نقطة حل أفضل نتبع ما يلي:

الخطوة (٢): ١- بالنسبة للمتغيرات غير الأساسية (X_N) يتم حساب المقدار $(Z_j - C_j)$ لكل متغير في المتجه (X_N) حيث:

$$Z_j = C_B B^{-1}P_j \quad , \quad j \in N$$

٢- تحديد المتغير غير الأساسي المناظر لأقل قيمة سالبة في $(Z_j - C_j)$ وليكون المتغير X_j فيكون هو المتغير الداخل في حالة إذا كان الهدف هو تعظيم (أو تحديد المتغير المناظر لأكبر قيمة موجبة إذا كان الهدف تصغير).

ثم ننتقل إلى الخطوة رقم (٤).

الخطوة (٣): إذا كانت جميع المقادير $(Z_j - C_j)$ المناظرة للمتغيرات غير الأساسية غير سالبة في حالة التعظيم (أو غير موجبة في حالة التصغير) فإن الحل الحالي هو الحل الأمثل X_B^* ، Z^* حيث:

$$X_B^* = B^{-1}P_0 \quad , \quad Z^* = C_B B^{-1}P_0$$

الخطوة (٤): ١- تحديد المتغير الخارج وليكن X_i وذلك من خلال حساب المقدار θ حيث:

$$\theta = \underset{i}{\mathrm{Min}} \left\{ \frac{(B^{-1}P_0)_i}{(B^{-1}P_j)_i} \middle| (B^{-1}P_j) > 0 \right\}$$

حيث P_j المتجه الذي يمثل معاملات المتغير الداخل X_j في المصفوفة (A,I). فيكون المتغير الخارج المناظر للقيمة θ وليكن X_i.

٢- ويتم الانتقال إلى نقطة أفضل يكون المتغير الداخل X_j والخارج X_i.

الخطوة (٥): يتم الرجوع إلى الخطوة (١) حيث يتم حساب C_B, C_N, N, B وتكرار عملية الانتقال من حل إلى حل آخر أفضل حتى نصل إلى الخطوة (٣).

ملحوظة: ١- عند نقطة الحل المبدئية تكون المصفوفة B مصفوفة الوحدة (I) وبالتالي $B = B^{-1} = I$.

٢- للانتقال من نقطة حل إلى نقطة حل أفضل يتطلب ذلك حساب المصفوفة B ثم إيجاد المصفوفة B^{-1} وممكن الإشارة إلى B، B^{-1} في الحل رقم k بالرمز B_k ، B_k^{-1}. حيث يتوقف تحديد كل من المتغير الداخل والخارج عند أي نقطة حل رقم k على B_k^{-1}.

(٨-٥) طريقة السمبلكس المعدلة

The Revised Simplex Method

في الفصل السابق يتضح أن الانتقال من نقطة حل إلى نقطة حل أفضل يتطلب ذلك تحديد المصفوفة B_k ثم إيجاد المصفوفة B_k^{-1}. وهذا يعني أنه عند كل نقطة حل يتم الانتقال إليها لأبد من إيجاد معكوس مصفوفة معاملات المتغيرات الأساسية الداخلة في الحل أي إيجاد B_k^{-1} وهذا يتطلب إيجاد المصفوفة B_k^{-1} عند كل حل أساسي ممكن يتم الحصول عليه مما يؤدي إلى أخذ وقت كبير في الحسابات إذا كانت تتم يدوياً، وفي حالة استخدام الحاسب يؤدي ذلك إلى استخدام سعة كبيرة حيث يتم حساب عدد من المصفوفات B_k^{-1} مساوي لعدد نقط الحلول الممكنة التي يتم الانتقال إليها. وهذا قد يؤدي أيضاً إلى وجود أخطاء في التقريب مما يؤدي إلى أن $B_k^{-1}\,B_k \neq I$ ولكن $B_k^{-1}\,B_k \approx I$ (حيث I تشير إلى مصفوفة الوحدة).

ومن الفصلين السابقين (٨-٢) ، (٨-٣) يتضح أن معكوس مصفوفة معاملات المتغيرات الأساسية في أي نقطة حل حالية ولتكن النقطة k أي المصفوفة B_k^{-1}، فإن معكوس مصفوفة معاملات المتغيرات الأساسية في نقطة الحل التالية مباشرةً $(k+1)$ أي المصفوفة B_{k+1}^{-1} تختلف عن المصفوفة B_k^{-1} في عناصر العمود الذي يمثل المتغير الخارج (i) فقط في النقطة $(k+1)$. حيث يمكن الحصول على B_{k+1}^{-1} باستخدام B_k^{-1} من العلاقة التالية [38,47]:

$$B_{k+1}^{-1} = E\,B_k^{-1} \qquad (8.40)$$

فإذا اعتبرنا أن المتغير الداخل هو X_j والخارج هـو X_i فإنـه يمكـن تعريـف المصفوفة E حيث:

$$E = [e_1, e_2, ..., e_{i-1}, \underset{\uparrow (i)}{\eta}, e_{i+1}, ..., e_m] \qquad (8.41)$$

حيث يشير الرمز e_k إلى متجه عمودي في المصفوفة E، جميع عناصره أصـفار إلا العنصر في الصف k يساوي واحد. حيث عناصر المتجه η على النحو التالي:

$$\eta = \begin{bmatrix} -\alpha_1^j/\alpha_i^j \\ -\alpha_2^j/\alpha_i^j \\ \vdots \\ +1/\alpha_i^j \\ \vdots \\ -\alpha_m^j/\alpha_i^j \end{bmatrix} \longrightarrow \text{العنصر رقم } i \qquad (8.42)$$

ومن الفصل السابق نجد أن المتجه α^j على النحو:

$$\alpha^j = B^{-1} P_j$$

حيث تشير α_i^j إلى العنصر المناظر للمتغير X_i في المتجه $B^{-1} P_j$ أو بعبـارة أخرى:

$$\alpha_i^j = (B^{-1} P_j)_i$$

وبالتالي لحل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس المعدلـة يتم إتباع الخوارزم (٨-١) ويتم حساب B_{next}^{-1} باستخدام العلاقة (8.41). وسوف نوضح ذلك من خلال الأمثلة التالية.

مثال (٨-٩): أعتبر مثال (٨-٧) حيث:

$$C_B = [-M, -M, 0] \quad , \quad C_N = [5 \quad 3 \quad 0]$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad N = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 4 & 7 & 0 \\ 9 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_B = [X_4, X_5, X_6]^T \quad , \quad X_N = [X_1, X_2, X_3]$$

باستخدام خوارزم (٨-١)

الخطوة (١): نحسب B_0^{-1} حيث $B_0 = I$ بالتالي فإن:

$$B_0^{-1} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

ويكون الحل في هذه النقطة:

$$X_B = B_0^{-1} P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ 28 \\ 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 28 \\ 45 \end{bmatrix}$$

$$Z = C_B B_0^{-1} P_0 = [-M, -M, 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ 28 \\ 45 \end{bmatrix}$$

$$= (-21M - 28M) = -49M \qquad (2)$$

الخطوة (٢): نحسب المقادير $(Z_j - C_j)$ للمتغيرات غير الأساسية X_1, X_2, X_3 على النحو التالي:

$$(Z_1 - C_1) = C_B B^{-1} P_1 - C_1 = -(11M + 5)$$

$$(Z_2 - C_2) = C_B B^{-1} P_2 - C_2 = -(10M + 3)$$

$$(Z_3 - C_3) = C_B B^{-1} P_3 - C_3 = M$$

(أنظر مثال (٨-٧)). وبما أن $(Z_1 - C_1)$ أقل قيمة بالسالب، بالتالي يصبح المتغير الداخل هو X_1.

الخطوة (٤): لتحديد المتغير الخارج من المتغيرات الأساسية (X_4, X_5, X_6) نتبع ما يلي (أنظر مثال (٨-٨)):

$$B_0^{-1} P_0 = \begin{bmatrix} 21 \\ 28 \\ 45 \end{bmatrix} \quad , \quad B_0^{-1} P_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\theta = \text{Min.}[\overset{X_4}{3} \quad \overset{X_5}{7} \quad \overset{X_6}{3}] = 3$$

بالتالي فإن المتغير الخارج هو X_4. وننتقل إلى نقطة حل أفضل كما يلي:

الخطوة (٥): $X_N = [X_4, X_2, X_3] \quad , \quad X_B = [X_1, X_5, X_6]$

$$C_B = [5, -M, 0] \quad , \quad C_N = [-M, 3, 0] \quad , \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

وبما أن $B_0^{-1}P_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$ بالتالي فإن:

$$\alpha' = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن:

$$\eta = \begin{bmatrix} 1/7 \\ -4/7 \\ -9/7 \end{bmatrix}$$

وتصبح المصفوفة E على النحو التالي:

$$E = \begin{bmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ -4/7 & 1 & 0 \\ -9/7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$B_1^{-1} = E\,B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ -4/7 & 1 & 0 \\ -9/7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ -4/7 & 1 & 0 \\ -9/7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>ملحوظة</u>: وهي نفس المصفوفة التي تم الحصول عليها في (4) في المثال السابق (مثال (٨-٨)).

وفي هذه النقطة نجد أن:

$$X_B = B_1^{-1}\,P_0 = \begin{bmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ -4/7 & 1 & 0 \\ -9/7 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 21 \\ 28 \\ 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 16 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$Z = C_B B_1^{-1} P_0 = [5\,,-M\,,0]\begin{bmatrix} 7 \\ 16 \\ 18 \end{bmatrix} = (35 - 16M) \qquad (3)$$

ونلاحظ أن قيمة دالة الهدف في (3) أفضل من قيمة دالة الهدف في (2).

<u>الخطوة (٦)</u>: للانتقال إلى نقطة حل أفضل، نقوم بحساب المقادير $(Z_j - C_j)$ للمتغيرات غير الأساسية X_4, X_2, X_3 على النحو التالي:

$$(Z_4 - C_4) = C_B B_1^{-1} P_4 - C_4$$

$$= [5\,,-M\,,0]\begin{bmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ -4/7 & 1 & 0 \\ -9/7 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - (-M)$$

$$= \left(\frac{5 + 11M}{7}\right)$$

$$(Z_2 - C_2) = C_B B_1^{-1} P_2 - C_2$$

$$= [5\,,-M\,,0]\begin{bmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ -4/7 & 1 & 0 \\ -9/7 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} - 3$$

$$= -\left(\frac{6 + 37M}{7}\right)$$

$$(Z_3 - C_3) = [5, -M, 0]\begin{bmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ -4/7 & 1 & 0 \\ -9/7 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0$$

$$= -\left(\frac{(5+4M)}{7}\right)$$

من قيم $(Z_j - C_j)$ نجد أن المتغير الداخل هو X_2.

<u>الخطوة (٧)</u>: ولتحديد المتغير الخارج نوجد $B_1^{-1}P_0$ ، $B_1^{-1}P_2$ على النحو التالي:

$$B_1^{-1}P_0 = \begin{bmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ -4/7 & 1 & 0 \\ -9/7 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 21 \\ 28 \\ 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 112/7 \\ 126/7 \end{bmatrix}$$

$$B_1^{-1}P_2 = \begin{bmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ -4/7 & 1 & 0 \\ -9/7 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 37/7 \\ 8/7 \end{bmatrix} \longleftarrow$$

$$\theta = \text{Min.}[\overset{X_1}{7}, \quad \overset{X_5}{112/37}, \quad \overset{X_6}{126/8}]$$

بالتالي فإن المتغير الخارج هو X_5. وننتقل إلى نقطة حل أفضل كما يلي:

$$X_B = [X_1, X_2, X_6] \quad , \quad X_N = [X_4, X_5, X_3]$$

$$C_B = [5, 3, 0] \quad , \quad C_N = [-M, -M, 0] \, , \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} & X_1 & \overset{\downarrow}{X_5} & X_6 \end{matrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -3/37 & 0 \\ 0 & 7/37 & 0 \\ 0 & -8/37 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$B_2^{-1} = E\,B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3/37 & 0 \\ 0 & 7/37 & 0 \\ 0 & -8/37 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/7 & 0 & 0 \\ -4/7 & 1 & 0 \\ -9/7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{7}{37} & \frac{-3}{37} & 0 \\ \frac{-4}{37} & \frac{7}{37} & 0 \\ \frac{-43}{37} & \frac{-8}{37} & 1 \end{bmatrix}$$

ويكون الحل في هذه النقطة على النحو:

$$X_B = B_2^{-1}\,P_0 = \begin{bmatrix} 7/37 & -3/37 & 0 \\ -4/37 & 7/37 & 0 \\ -4/37 & -8/37 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ 28 \\ 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63/37 \\ 112/37 \\ 1357/37 \end{bmatrix}$$

$$Z = C_B B_2^{-1} P_0 = [5\,,3\,,0] \begin{bmatrix} 63/37 \\ 112/37 \\ 1357/37 \end{bmatrix} = \frac{651}{37} \qquad (4)$$

وننتقل إلى نقطة حل أخرى.

<u>الخطوة (٨)</u>: نحسب $(Z_j - C_j)$ للمتغيرات غير الأساسية X_4, X_5, X_3 على النحو التالي:

$$(Z_4 - C_4) = [5, 3, 0]\begin{bmatrix} 7/37 & -3/37 & 0 \\ -4/37 & 7/37 & 0 \\ -43/37 & -8/37 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - (-M)$$

$$= \left[\frac{23}{37}, \frac{6}{37}, 0\right]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + M = \left(\frac{23}{37} + M\right)$$

$$(Z_5 - C_5) = [5, 3, 0]\begin{bmatrix} 7/37 & -3/37 & 0 \\ -4/37 & 7/37 & 0 \\ -43/37 & -8/37 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - (-M)$$

$$= \left[\frac{23}{37}, \frac{6}{37}, 0\right]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + M = \left(\frac{6}{37} + M\right)$$

$$(Z_3 - C_3) = [5, 3, 0]\begin{bmatrix} 7/37 & -3/37 & 0 \\ -4/37 & 7/37 & 0 \\ -43/37 & -8/37 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0$$

$$= \left[\frac{23}{37}, \frac{6}{37}, 0\right]\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = \left(\frac{-23}{37}\right)$$

وبالتالي فإن المتغير الداخل هو المتغير X_3.

<u>الخطوة (٩)</u>: ولتحديد المتغير الخارج نحسب كل من $B_2^{-1}P_0$ ، $B_2^{-1}P_3$ على النحو التالي:-

$$B_2^{-1}P_0 = \begin{bmatrix} \frac{7}{37} & \frac{-3}{37} & 0 \\ \frac{-4}{37} & \frac{7}{37} & 0 \\ \frac{-43}{37} & \frac{-8}{37} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ 28 \\ 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{63}{37} \\ \frac{112}{37} \\ \frac{538}{37} \end{bmatrix}$$

$$B_2^{-1}P_3 = \begin{bmatrix} \frac{7}{37} & \frac{-3}{37} & 0 \\ \frac{-4}{37} & \frac{7}{37} & 0 \\ \frac{-43}{37} & \frac{-8}{37} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-7}{37} \\ \frac{4}{37} \\ \frac{43}{37} \end{bmatrix} \leftarrow$$

$$\theta = \text{Min.}\Big[\overset{X_1}{-} \quad \overset{X_2}{\frac{112}{4}} \quad \overset{X_6}{\frac{538}{43}}\Big] = \frac{538}{43} = 12.51$$

ومن قيمة θ نجد أن المتغير الخارج هو X_6. وتصبح المتغيرات الأساسية X_1, X_2, X_3 ، والمتغيرات غير الأساسية X_4, X_5, X_6.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/43 \\ 0 & 1 & -4/43 \\ 0 & 0 & 37/43 \end{bmatrix}$$

$$B_3^{-1} = E\,B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/43 \\ 0 & 1 & -4/43 \\ 0 & 0 & 37/43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7/37 & -3/37 & 0 \\ -4/37 & 7/37 & 0 \\ -43/37 & -8/37 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -5/43 & 7/43 \\ 0 & 9/43 & -4/43 \\ -1 & -8/43 & 37/43 \end{bmatrix}$$

ويكون الحل في هذه الحالة:

$$X_B = B_3^{-1}\ P_0 = \begin{bmatrix} 0 & -5/43 & 7/43 \\ 0 & 9/43 & -4/43 \\ -1 & -8/43 & 37/43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 \\ 28 \\ 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.07 \\ 1.67 \\ 12.5 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$Z = C_B B_3^{-1} P_0 = [5\,,3\,,0] \begin{bmatrix} 4.07 \\ 1.67 \\ 12.5 \end{bmatrix} = 25.37 \quad (6)$$

<u>الخطوة (١٠)</u>: وللانتقال إلى نقطة حل آخر أفـضل - نقـوم بحـساب المقـادير $(Z_j - C_j)$ للمتغيرات غير الأساسية X_4, X_5, X_6 على النحو التالي:

$$(Z_4 - C_4) = C_B B_3^{-1} P_4 - C_4$$

$$= [5\,,3\,,0] \begin{bmatrix} 0 & -5/43 & 7/43 \\ 0 & 9/43 & -4/43 \\ -1 & -8/43 & 37/43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - (-M)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{43} & \frac{23}{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + M = M \quad (7)$$

$$(Z_5 - C_5) = C_B B_3^{-1} P_5 - C_5$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{43} & \frac{23}{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + M = \left(\frac{2}{43} + M \right) \quad (8)$$

$$(Z_6 - C_6) = C_B B_3^{-1} P_6 - C_6$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{43} & \frac{23}{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = \left(\frac{23}{43} \right) \qquad (9)$$

وبما أن جميع قيم $(Z_j - C_j)$ في (9)−(7) قيم غير سالبة، وبالتالي فإن الحل الحالي هو الحل الأمثل أي أن:

$$X^* = B_3^{-1} P_0 = \begin{bmatrix} 4.07 \\ 1.67 \\ 12.5 \end{bmatrix}$$

$$Z^* = C_B\, B_3^{-1} P_0 = 25.37$$

(٨-٦) التغير في بعض المعلمات

Variations in Some Parameters

في الباب السادس تناولنا بشيء من التفصيل تأثير حدوث تغير في بعض معلمات النموذج في b , C على الحل الأمثل كذلك تحديد الفترة التي يحدث فيها تغير لأحد المعلمات في المتجه b أو المتجه C بحيث لا تتغير المتغيرات الأساسية في الحل الأمثل ولكن قد تتغير قيمة كل أو بعض المتغيرات الأساسية، وتم تقديم ذلك بدون إثبات. وفي هذا الفصل سوف نتناول الإثبات على النحو التالي:

إذا اعتبرنا نموذج البرمجة الخطية على النحو:

$$\begin{aligned} &Max.Z = CX \\ &S.T. \quad AX \le b \\ &\qquad\quad X \ge 0 \end{aligned}$$

فإن:

<u>أولاً: التغير في بعض عناصر المتجه b</u>: إذا فرضنا أن X_B تشير إلى الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية، حيث تشير المصفوفة B إلى مصفوفة معاملات المتغيرات الأساسية حيث:

$$X_B = B^{-1}b \qquad (8.43)$$

فإذا فرضنا أن b_k حيث $k = 1,2,...,m$ تم تغيره من b_k إلى $(b_k + \Delta_k)$. وبالتالي يصبح المتجه b بعد التغير وسوف نرمز لها بالرمز b^* حيث:

$$b^* = [b_1, b_2, ..., b_{k-1}, b_k + \Delta_k, b_{k+1}, ..., b_m] \qquad (8.44)$$

ومن ثم يصبح الحل بعد التغيير على النحو التالي:

$$X_B^* = B^{-1}b^* = X_B + \sum_{k=1}^{m}(b_k + \Delta_k) \qquad (8.45)$$

وبما أن $X_B^* \geq 0$ فإن:

$$X_{Bi} + C_{ik}\Delta_k \geq 0 \qquad (8.46)$$

ووفقاً لشرط الإتاحة فإن:

$$\underset{C_{ik}>0}{\text{Max.}}\left\{\frac{-X_{Bi}}{C_{ik}}\right\} \leq \Delta_k \leq \underset{C_{ik}<0}{\text{Min.}}\left\{\frac{-X_{Bi}}{C_{ik}}\right\} \qquad (8.47)$$

حيث تشير C_{ik} إلى العنصر في الصف i والعمود k في المصفوفة B^{-1} في الحل الأمثل – والعلاقة (8.47) هي نفس العلاقة التي قُدمت في (6.22).

ثانياً: التغير في بعض عنصر C: بالمثل إذا تغير C_k إلى $(C_k + \Delta_k)$، وبما أن شرط الأمثلية يتطلب أن يكون $(Z_j - C_j) \geq 0$ بالنسبة للمتغيرات غير الأساسية لذلك لأبد أن نفرض هل العنصر الذي حدث فيه تغير وليكن C_k ينتمي إلى المتغيرات الأساسية بمعنى $C_k \in C_B$ أم ينتمي إلى المتغيرات غير لأساسية أي $C_k \notin C_B$. وبالتالي فإن لدينا حالتين هما:

أ- الحالة الأولي: إذا كان C_k بحيث $C_k \notin C_B$

بما أن:

$$Z_k^* - C_k^* = Z_k - (C_k + \Delta_k)$$

ويظل الحل الأمثل قبل التغير حل أمثل بعد التغير في حالة إذا كان:

$$(C_k + \Delta_k) \geq 0 \longrightarrow \Delta_k \leq (Z_k - C_k) \qquad (8.48)$$

ب- الحالة الثانية: إذا كان C_k بحيث $C_k \in C_B$

بما أن:

$$Z_j^* - C_j^* = (Z_j - C_j) + \Delta_k y_{kj}$$

وبما أن عند الحل الأمثل فإن $(Z_j^* - C_j^*) \geq 0$، بالتالي يظل الحل الأمثل قبل التغير نفس الحل بعد التغير إذا كانت Δ_k تقع داخل الفترة التالية:

$$\underset{C_{kj'} > 0}{\text{Max.}}\left\{\frac{-(Z_j - C_j)}{C_{kj'}}\right\} \leq \Delta_k \leq \underset{C_{kj'} < 0}{\text{Min.}}\left\{\frac{-(Z_j - C_j)}{C_{kj'}}\right\} \qquad (8.49)$$

حيث تشير $C_{kj'}$ إلى العنصر في الصف k والعمود j' في المـــصفوفة B^{-1} في الحل الأمثل – والعلاقة (8.49) هي نفس العلاقة المقدمة في (6.25).

(٨-٧) تمرينات Exercises

(٨-١) أعتبر التمرينات في الفصل (٣-٨) - ضع كل نموذج من النماذج في تمرين (٣-٦) في الصياغة المعيارية ثم في صورة مصفوفات.

(٨-٢) أوجد الحل الأمثل لكل نموذج من النماذج في (٨-١) باستخدام شرطي الأمثلية والإتاحة.

(٨-٣) أثبت أن التوليفة $[0,7]^T$ توليفة محدبة لفئة المتجهات التالية:

$$\left\{[3,6]^T,[-6,9]^T,[2,1]^T,[-1,1]^T\right\}$$

(٨-٤) أثبت أن أي فئة من المتجهات بحيث يكون أحد هذه المتجهات متجه صفري، تكون هذه المتجهات غير مستقلة خطياً Linearly Dependent.

(٨-٥) أعتبر نظام المعادلات التالية:

$$6X_1+12X_2+10X_3+X_4=24$$
$$2X_1+4X_2+X_3+2X_5=8$$
$$X_1,X_2,X_3,X_4,X_5\geq 0$$

حدد جميع النقط الطرفية الممكنة والحلول الأساسية المناظرة لكل نقطة.

(٨-٦) أثبت أن المتجهين: $P_1=[1,2]^T,\ \ P_2=[9,18]^T$ متجهين غير مستقلين.

(٨-٧) هل المتجهات التالية:

$$P_1 = [1, 1, 3, 1]^T, \quad P_2 = [1, 2, 1, 1]^T, \quad P_3 = [1, 0, 0, 1]^T$$

مستقلة أم غير مستقلة.

(٨-٨) أعتبر نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\begin{aligned} Min.Z &= 2X_1 + 5X_2 + X_3 \\ S.T. \quad & 3X_1 + 6X_2 + 6X_3 \geq 9 \\ & 4X_1 + 6X_2 + 8X_3 \leq 12 \\ & X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{aligned}$$

أ- حول النموذج إلى الصياغة المعيارية.

ب- ضع النموذج في شكل مصفوفات.

ج- أوجد عدد الحلول الأساسية.

د- حدد الحلول الأساسية الممكنة.

(٨-٩) أثبت أن المتجه $[0.3, 2.3, 1.7]^T$ يمثل توليفة خطية محدبة للفئة:

$$\{[1, 3, 6]^T, [-1, 4, 1]^T, [2, -1, 0]^T\}$$

(٨-١٠) ضع كل نموذج من النماذج التالية في الصياغة المعيارية وفي صـورة مصفوفات.

$$\begin{aligned} (b) Min.Z &= 5X_1 + X_2 \\ S.T. \quad & X_1 + X_2 \geq 5 \\ & 9X_1 + 12X_2 \leq 108 \\ & 10X_1 - 7X_2 \leq 70 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a) Max.Z &= 5X_1 + 7X_2 \\ S.T. \quad & 5X_1 + 10X_2 \leq 50 \\ & 8X_1 + 7X_2 \leq 56 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$(c)\ Max.Z = 4X_1 + 3X_2 + X_3$$
$$S.T.\quad 20X_1 + 40X_2 \le 200$$
$$16X_1 + 14X_2 + 10X_3 \le 112$$
$$X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

$$(d)\ Min.Z = X_1 + X_2$$
$$S.T.\quad -X_1 + X_2 \le 5$$
$$X_2 \ge 2$$
$$X_1 \le 4$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

(٨-١١) حدد باستخدام شرطي الأمثلية والإتاحة الحل الأمثل في الحالات المختلفة في (٨-١٠).

(٨-١٢) باستخدام طريقة السمبلكس المعدلة أوجد الحل الأمثل في كل حالة من الحالات الموجودة في (٨-١٠).

(٨-١٣) اعتبر تمرين (٨-١٠):

١- في الحالات (a) ، (c) حدد حدود التغير في معاملات دالة الهدف حتى يظل الحل أمثل.

٢- في (b) ، (c) حدد حدود التغير في الطرف الأيمن (b) حتى يظل الحل أمثل.

٣- في (a) ، (c) حدد حدود التغير في c , b معاً حتى يظل الحل أمثل.

الباب التاسع

البرمجة غير الخطية

Nonlinear Programming

(٩-١) متطلبات أساسية **Prerequisites**

(٩-٢) مشاكل البرمجة غير الخطية
Non-Linear Programming Problems

(٩-٣) المشاكل غير المقيدة **Unconstrained Problems**

(٩-٤) طريقة نيوتن رافسون
Newton-Raphson's Method

(٩-٥) المشاكل المقيدة **Constrained Problems**

(٩-٦) الحل باستخدام الحاسب (الحزم الجاهزة)
Computer Solution

(٩-٧) تمرينات **Exercises**

(٩-١) متطلبات أساسية Prerequisites

في الباب الثامن، تناولنا بالتفصيل الخلفية الرياضية لطريقة السمبلكس، ووضحنا أن طريقة السمبلكس تمكننا من الحصول على الحل الأمثل Optimum Solution للنموذج الخطى. حيث بُنيت طريقة السمبلكس على حل المعادلات الخطية التي تناظر القيود الهيكلية - حيث يكمن الحل الأمثل في أحد النقط الطرفية لفئة الحلول الممكنة (فراغ الحل)، حيث تمثل منطقة الحلول الممكنة فئة محدبة Convex Set (أنظر تعريف (٨-٤)). ولكن عادةً تكون المشاكل الحقيقية مشاكل غير خطية، وفي حالة عندما تكون المشكلة مشكلة غير خطية هنا نميز بين نوعين من المشاكل على النحو التالي:

<u>النوع الأول</u>: تكون المشكلة غير خطية بحيث تكون منطقة الحلول الممكنة التي تمثل القيود الهيكلية فئة محدبة Convex Set، وفي هذه الحالة يمكن الحصول على الحل الأمثل عند أحدى النقط الطرفية لفئة الحلول الممكنة.

<u>النوع الثاني</u>: تكون المشكلة غير خطية وتكون فئة الحلول الممكنة فئة غير محدبة Non-Convex Set، وفي هذه الحالة يمكن الحصول على نقطة حل أمثل نسبية Local Optimal Solution Point تختلف في معظم الحالات عن نقطة الحل الأمثل المطلق Global Optimal Solution Point.

من هنا نشأ التنوع الكبير في أساليب حل المشاكل غير الخطية، حيث يتحدد أفضل أسلوب لحل المشكلة غير الخطية وفقاً لخصائص كل مشكلة.

وقد بُنيت أساليب حل المشاكل غير الخطية على حل المعـادلات الخطيـة Linear Equations أو المعادلات غير الخطيـة Nonlinear Equations أو الاثنين معاً.

وفي هذا الباب سوف نتناول بالدراسة مشاكل البرمجة غير الخطية التـي تتضمن دوال غير خطية ذات سلوك عادى Well Behaved Functions بمعنى الـدوال المتـصلة Continuous Functions وليـست غيـر متـصلة Discontinuous كذلك ليست لها نقط شاذة Singularity Points [52].

وفيما يلي سوف نقدم بعض التعريفات الضرورية في دراسة البرمجة غير الخطية.

إذا اعتبرنا X متجه حيث $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ، $f(X)$ دالـة فـي المتغيرات X، كذلك المتجه h حيث $h=(h_1, h_2, \dots, h_n)^T$

<u>تعريف (٩-١)</u>: تسمى النقطة الطرفية X_0 Extreme Point نقطـة نهايـة عظمى Maximum Point إذا كان:

$$f(X_0 + h) \le f(X_0) \qquad (9.1)$$

بحيث القيمة $|h_j|$ صغيرة جداً، لجميع عناصر j ، $j = 1,2,\dots,n$.

كذلك تسمى النقطة الطرفية X_0 نقطة نهاية صغرى Minimum Point إذا كان:

$$f(X_0 + h) \ge f(X_0) \qquad (9.2)$$

والنقط الطرفية العظمى أو الصغرى قد تكون نقط طرفية نسبية Local (Relative) أي بالنسبة للنقط المجاورة لها من اليمين أو اليسار. وقد تكون نقط طرفية مطلقة Global (Absolute)، كما سوف نوضح فيما يلي.

وتعتبر النقطة الطرفية (سواء عظمى أو صغرى) نقطة نسبية إذا وجد أكثر من نقطة طرفية من نفس النوع داخل نفس الفترة المعرفة فيها الدالة.

فإذا اعتبرنا الفئة K هي الفئة التي تشتمل على النقط الطرفيـة النسبية العظمى، والفئة $K^{\backslash}$ تشتمل على النقط الطرفية النسبية الصغرى.

<u>تعريف (٩-٢)</u>: تعتبر النقطة $\left(X_j\,,\; f(X_j)\right)$ نقطة نهاية عظمى مطلقة إذا كان:

$$f(X_j) = \text{Max}\,\{\, f(X_i)\,, \text{For all } X_i \in K \,\} \qquad (9.3)$$

كذلك تعتبر النقطة $\left(X_i\,,\; f(X_i)\right)$ نقطة نهاية صغرى مطلقة إذا كان:

$$f(X_i) = \text{Min}\,\{\, f(X_j)\,, \text{For all } X_j \in K^{\backslash} \,\} \qquad (9.4)$$

<u>مثال (٩-١)</u>: إذا اعتبرنا الدالة f(X) دالة في متغير واحد X كما هو موضح بالشكل التالي، فنجد أنه خلال الفترة [a , b] أن:

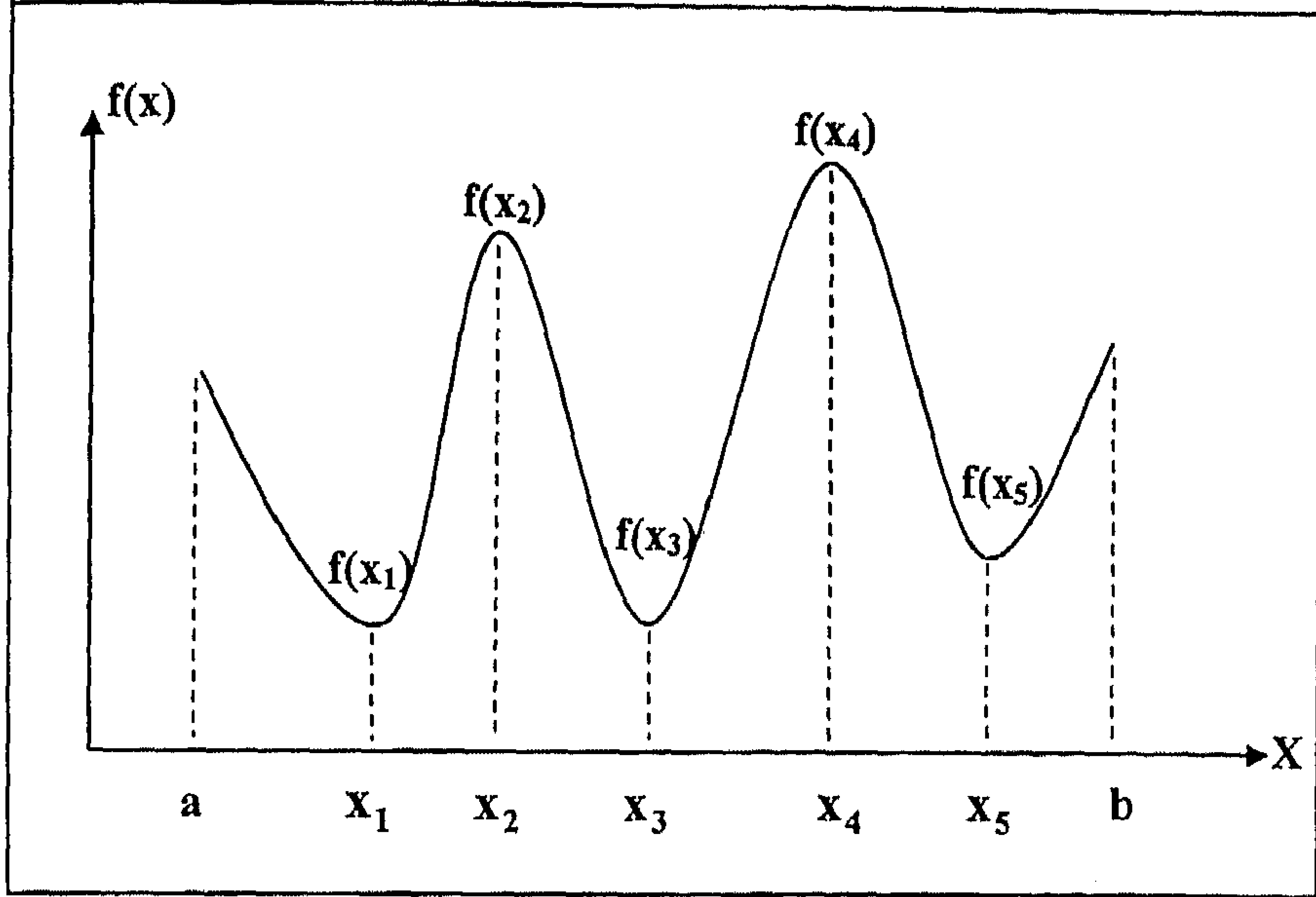
$$K = \left\{ (X_2\,,\; f(X_2))\;,\; (X_4\,,\; f(X_4)) \right\}$$

$$K^{\backslash} = \left\{ (X_1\,,\; f(X_1))\;,\; (X_3\,,\; f(X_3))\;,\; (X_5\,,\; f(X_5)) \right\}$$

وبالتالي تكون نقطة النهاية العظمى للدالة f(X) هي $\left(X_4\,,\; f(X_4)\right)$ حيث:

$$f(X_4) = \text{Max.}\,\{\, f(X_2)\;,\; f(X_4) \,\}$$

شكل (٩-١): يوضح نقط النهايات العظمة والصغرى للدالة f(X)



كذلك نجد أن النقطة $(X_1 \,,\, f(X_1))$ نقطة نهاية صغرى مطلقة حيث:

$$f(X_1) = \text{Min.}\{ f(X_1) \,,\, f(X_3) \,,\, f(X_5) \}$$

(٩-٢) مشاكل البرمجة غير الخطية

Non-Linear Programming Problems

عادةً تكون مشكلة البرمجة على النحو التالي:

أوجد قيم X_j ، بحيث $j = 1,2,..,n$ التي تجعل:

$$\text{Max. (or Min.) } Z = f(X_1, X_2, \dots, X_n) \qquad (9.5)$$

$$\text{S.T.} \quad g_i(X_1, X_2, \dots, X_n) \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} b_i \quad , i = 1,2,\dots,m \qquad (9.6)$$

فإذا كان يوجد دالة واحدة على الأقل من الدوال $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ، $g_i(X)$ دالة غير خطية، تكون المشكلة (9.6)-(9.5) مشكلة برمجة غير خطية.

وعندما تكون القيود في (9.6) في شكل متساويات على النحو:

$$g_i(X_1, X_2, \dots, X_n) = b_i \quad , i = 1,2,\dots,m \qquad (9.7)$$

تسمى المشكلة في هذه الحالة بمشكلة الأمثلية التقليدية Classical Optimization Problem وتسمى طرق حل هذه المشاكل التقليدية بطرق حل مشاكل الأمثلية التقليدية Classical Optimization Methods. وتعتبر طرق الحل التقليدية ذات أهمية في حل المشاكل التقليدية كذلك هي الأساس في فهم طرق وحل المشاكل الأخرى غير التقليدية عندما تأخذ مشكلة البرمجة غير الخطية شكلها العام في (9.6)-(9.5).

وعند البحث عن حل لمشكلة البرمجة غير الخطية نحتاج إلى:

أ) فحص جميع النقط التي عندها المشتقات الجزئية الأولى المتصلة تساوى صفر.

ب) فحص جميع النقط داخل منطقة الحلول الممكنة التي يوجد عندها عدم اتصال للمشتقات الجزئية الأولى.

ويمكن تقسيم مشاكل البرمجة غير الخطية إلى:

- مشاكل غير مقيدة **Unconstrained Problems**.
- مشاكل مقيدة **Constrained Problems**.

<u>أولاً: المشاكل غير المقيدة</u>: وهنا تكون المشكلة على النحو:

أوجد X_j ، بحيث $j = 1,2,..,n$ التي تجعل:

$$\text{Max. (or Min.) } Z = f(X_1 , X_2 , \dots , X_n)$$

ولا توجد أي قيود على دالة الهدف.

وعندما تكون الدالة $f(X_1 , X_2 , \dots , X_n)$ دالة مقعرة **Concave** (محدبة **Convex**) فإنه يمكن الحصول على النهاية العظمى (الصغرى) المطلقة **Global Maximum (Global Minimum)** وتكون هذه النهاية هي الحل الأمثل للمشكلة. وفي هذه الحالة يمكن استخدام الطرق التقليدية للحل كما سنوضح في الفصل التالي.

أما إذا كانت الدالة $f(X_1 , X_2 , \dots , X_n)$ غير ذلك أي ليست مقعرة (محدبة) فإنه يمكن الحصول على النهاية العظمى (الصغرى) النسبية **Local Maximum (Minimum) Point** للدالة $f(X_1 , X_2 , \dots , X_n)$ ، وتوجد أساليب حديثة نسبياً مثل البرمجة الهندسية **Geometric Programming** [26] تتناول هذا النوع من المشاكل، كما سوف نوضح في الباب التالي.

ثانياً: المشاكل المقيدة: وهنا تكون المشكلة على النحو الموضح في (9.6)-(9.5) بحيث تكون $f(X_1, X_2, ..., X_n)$ أو $g_i(X_1, X_2, ..., X_n)$ $i = 1,2,...,m$ أو كلاهما دالة غير خطية وفي هذه الحالة:

- إذا كانت الفئة التي تحقق القيود $g_i(X)$ فئة مغلقة وحدودية محدبة Closed Bounded Convex Set ودالة الهدف مقعرة (محدبة) فإنه يمكن الحصول على النهاية العظمى (الصغرى) للدالة $f(X_1, X_2, ..., X_n)$ (وتعتبر مشكلة البرمجة الخطية حالة خاصة من هذا النوع من المشاكل المقيدة). وفي هذه الحالة أيضاً يمكن الحصول على الحل الأمثل باستخدام الطرق التقليدية كما سوف نوضح في الفصل (٩-٥).

- أما إذا كانت الفئة التي تحقق القيود $g_i(X)$ فئة غير محدبة Nonconvex Set. وفي هذه الحالة سواء كانت $f(X_1, X_2, ..., X_n)$ مقعرة (محدبة) أو غير ذلك، فإنه يمكن الحصول على نهاية عظمى (صغرى) نسبية للدالة $f(X_1, X_2, ..., X_n)$ التي تحقق القيود وبالتالي الحصول على حل نسبي للمشكلة، وكما ذكرنا أعلاه فإنه توجد أساليب حديثة نسبياً تتناول هذا النوع من المشاكل قد تمكننا من الحصول على حل أفضل من الحل النسبي للمشكلة كما سوف نوضح ذلك في الباب التالي.

(٩-٣) المشاكل غير المقيدة Unconstrained Problems

إذا أعتبرنا مشكلة البرمجة غير الخطية على النحو التالي:

أوجد X_j ، بحيث $j = 1,2,..,n$ التي تجعل:

$$\text{Max. (or Min.) } Z = f(X) = f(X_1 , X_2 , \dots , X_n)$$

حيث $X = (X_1 , X_2 , \dots , X_n)^T$

وكما ذكرنا في الفصل السابق (٩-٢)، أن حل المشاكل غير الخطية يتطلب فحص النقط الطرفية التي عندها تكون المشتقات الجزئية الأولى تساوي صفر أي نقط الاستقرار Stationary Points (أي النقط التي عندها يكون معامل الانحدار Slop يساوي صفر).

وفيما يلي سوف نقدم نظريتين عن طريقهما يمكن تحديد النقط الطرفية العظمى ، والصغرى للدالة $f(X_1 , X_2 , \dots , X_n)$ إذا توافرت الشروط.

نظرية (٩-١): الشرط الضروري Necessary Condition لتكون النقطة X_0 نقطة طرفية Extreme للدالة $f(x)$ هو:

$$\nabla f(X_0) = \left.\frac{\partial f(X)}{\partial X_i}\right|_{X=X_0} = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, n \qquad (9.8)$$

الإثبات: ١- إذا فرضنا أن النقطة X_0 نقطة نهاية صغرى - وباستخدام مفكوك تيلور (أنظر ملحق D) للدالة $f(x)$ عند النقطة X_0 على النحو التالي:

$$f(X_0+h)=f(X_0)+\nabla f(X_0)\,h+0(h^2)\ ^{*}$$

$$f(X_0+h)-f(X_0)\approx\nabla f(X_0)\,h \qquad (9.9)$$

٢- فإذا اعتبرنا أن $\nabla f(X_0)$ تختلف عن الصفر أي أن:

$$\left.\frac{\partial f(X)}{\partial X_j}\right|_{X=X_0}<0 \quad \text{أو} \quad \left.\frac{\partial f(X)}{\partial X_j}\right|_{X=X_0}>0\ ,\ j=1,2,\dots,n \quad (9.10)$$

فإذا اعتبرنا أن $h_j>0$ ، فبضرب طرفي العلاقة $\left.\frac{\partial f(X)}{\partial X_j}\right|_{X=X_0}<0$ في h_j نجد أن

$$h_j\left.\frac{\partial f(X)}{\partial X_j}\right|_{X=X_0}<0 \qquad ,\quad j=1,2,\dots,n \qquad (9.11)$$

وبوضع $h_i=0$ ، $i=1,2,\dots,n$ ، بحيث $i\neq j$ نجد أن الطرف الأيمن لـــ (9.9) قيمته أكبر من الطرف الأيسر، يعني:

$$f(X_0+h)<f(X_0) \qquad (9.12)$$

وهذا يخالف (يناقض) contradiction افتراض أن النقطـــة X_0 نقطـــة نهايـــة صغرى. وبالتالي فإنه عندما تكون X_0 نقطة نهاية صغرى لأبد أن يكون:

$$\left.\frac{\partial f(X)}{\partial X_j}\right|_{X=X_0}=0$$

لجميع قيم $j=1,2,\dots,n$

* حيث $0(h^2)$ مقادير من الدرجة الثانية أو أكثر في h وتؤول إلى الصفر أسرع من المقادير التي تحتوي على h.

٤- بالمثل إذا فرضنا أن X_0 نقطة نهاية عظمى فإذا فرضنا أن $h_j < 0$ من العلاقة (9.10) نجد أن:

$$h_j \left. \frac{\partial f(X)}{\partial X_j} \right|_{X=X_0} > 0$$

وبوضع $h_i = 0$، $i = 1,2,...,n$ ، بحيث $i \neq j$ نجد أن:

$$f(X_0 + h) > f(X_0)$$

وهذا يخالف افتراض أن النقطة X_0 نقطة نهاية عظمى. وبالتالي فإنه عندما تكون X_0 نقطة نهاية عظمى لأبد أن يكون:

$$\left. \frac{\partial f(X)}{\partial X_j} \right|_{X=X_0} = 0 \quad , \quad j = 1, 2, ..., n$$

<u>ملحوظة</u>: ومما هو جدير بالذكر أن متجه المشتقات الجزئية للدالة $f(X)$ عند نقطة ما ولتكون X^* بحيث:

$$\nabla f(X^*) = 0$$

والنقطة X^* ليست نهاية عظمى أو صغرى فإن النقطة X^* تكون نقطة انقلاب Inflection Point أو نقطة ارتكاز Saddle Point [٧] وتسمى جميع النقط التي تحقق الشرط (9.8) بنقط استقرار Stationary Points وبالتالي تعتبر نقط النهايات العظمى والصغرى والانقلاب والأرتكاز نقط استقرار.

<u>نظرية (٩-٢)</u>: إذا فرضنا أن X_0 نقطة استقرار وإذا رمزنا للمصفوفة الهيسينية H (أنظر ملحق B) عند النقطة X_0 بالرمز $H|_{X=X_0}$ فإن:

أ) تكون النقطة X_0 نقطة نهاية عظمى إذا كانت المصفوفة $H|_{X=X_0}$ تامة السالبية.

ب) تكون النقطة X_0 نقطة نهاية صغرى إذا كانت المصفوفة $H|_{X=X_0}$ تامة الإيجاب.

ج) تكون النقطة X_0 نقطة انقلاب **Inflection Point** أو ارتكاز **Saddle Point** إذا لم يتحقق (أ) أو (ب).

__الإثبات__: إذا اعتبرنا أن X_0 نقطة استقرار للدالة $f(X)$ ، وإذا فرضنا أن $0<\theta<1$ ، باستخدام مفكوك تيلور نجد أن:

$$f(X_0+h)=f(X_0)+\nabla f(X_0)\,h+\frac{1}{2}\,h' H\,h\Big|_{X_0+\theta h}$$

$$f(X_0+h)-f(X_0)=\nabla f(X_0)\,h+\frac{1}{2}\,h' H\,h\Big|_{X_0+\theta h} \qquad (9.13)$$

وبما أن:

$$\nabla f(X_0)\,h=0$$

حيث $h\neq 0$ عند نقطة الاستقرار X_0 بالتالي فإن:

$$f(X_0+h)-f(X_0)=\frac{1}{2}\,h' H\,h\Big|_{X_0+\theta h} \qquad (9.14)$$

فإذا كانت النقطة X_0 نقطة نهاية صغرى فإن:

$$f(X_0+h)>f(X_0)$$

وتتحقق العلاقة عندما:

$$\frac{1}{2}\,h' H\,h\Big|_{X_0}>0 \qquad (9.15)$$

وتتحقق العلاقة (9.15) إذا وإذا فقط كانت المصفوفة $H|_{X_0}$ تامة الإيجاب.

كذلك إذا كانت النقطة X_0 نقطة نهاية عظمى فإن:

$$f(X_0 + h) < f(X_0)$$

وتتحقق العلاقة عندما:

$$\frac{1}{2}\, h' H\, h\Big|_{X_0} < 0 \qquad (9.16)$$

وتتحقق العلاقة (9.16) إذا وإذا فقط كانت المصفوفة $H|_{X_0}$ تامة السالبية.

<u>مثال (٩-٢)</u>: أوجد نقط الاستقرار للدالة التالية ثم حدد نوع كل نقطة.

$$f(X_1, X_2) = -X_1^2 - X_2^2 + 4\,X_1 + 6\,X_2 + 10$$

الحل: ١- وفقاً لنظرية (٩-١) نوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة ونساويها بالصفر للحصول على نقط الاستقرار على النحو التالي:

$$\frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_1} = -2\,X_1 + 4 = 0$$

$$\frac{\partial f(X_1, X_2)}{\partial X_2} = -2\,X_2 + 6 = 0$$

وبحل المعادلتين السابقتين نجد أن للدالة $f(X_1, X_2)$ نقطة استقرار واحدة هي النقطة $(X_1 = 2,\ \ X_2 = 3,\ \ f = 15)$ ولتحديد نوع النقطة نتبع التالي.

٢- نوجد مصفوفة المشتقات الجزئية من الترتيب الثاني H عند نقطة الاستقرار:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(X_1,X_2)}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 f(X_1,X_2)}{\partial X_1\, X_2} \\ \frac{\partial^2 f(X_1,X_2)}{\partial X_2\, X_1} & \frac{\partial^2 f(X_1,X_2)}{\partial X_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

٣- وبفحص المصفوفة H عند نقطة الاستقرار نجد أنها مصفوفة تامة السالبية - وبالتالي فإن نقطة الاستقرار نقطة نهاية عظمى.

مثال (٩-٣): حدد نقط الاستقرار للدالة التالية ثم حدد نوع كل نقطة.

$$f(X_1,X_2,X_3) = -X_1^3 - X_2^3 - X_3^3 + 3\,X_1 + 12\,X_2 - \frac{3}{2}X_3^2$$

الحل: ١- للحصول على نقط الاستقرار نوجد المشتقات الجزئية من الترتيب الأول ونساويها بالصفر.

$$\frac{\partial f(X_1,X_2,X_3)}{\partial X_1} = -3\,X_1^2 + 3 = 0 \longrightarrow X_1 = \pm 1$$

$$\frac{\partial f(X_1,X_2,X_3)}{\partial X_2} = -3\,X_2^2 + 12 = 0 \longrightarrow X_2 = \pm 2$$

$$\frac{\partial f(X_1,X_2,X_3)}{\partial X_3} = -3\,X_3^2 - 3\,X_3 = 0 \longrightarrow X_3 = 0, -1$$

وبحل المعادلات السابقة نجد أن نقط الاستقرار هي:

$(X_1 = 1,\ X_2 = 2,\ X_3 = 0)$, $(X_1 = -1,\ X_2 = 2,\ X_3 = 0)$,
$(X_1 = 1,\ X_2 = -2,\ X_3 = 0)$, $(X_1 = -1,\ X_2 = -2,\ X_3 = 0)$,
$(X_1 = 1,\ X_2 = 2,\ X_3 = -1)$, $(X_1 = -1,\ X_2 = 2,\ X_3 = -1)$,
$(X_1 = 1,\ X_2 = -2,\ X_3 = -1)$, $(X_1 = -1,\ X_2 = -2,\ X_3 = -1)$

٢- نوجد المصفوفة H حيث:

$$H=\begin{bmatrix}-6X_1 & 0 & 0\\ 0 & -6X_2 & 0\\ 0 & 0 & -6X_3-3\end{bmatrix}$$

٣- أ) إذا اعتبرنا أن: $X_0=(X_1=1,\ \ X_2=2,\ \ X_3=0)$ فإن:

$$H|_{X_0}=\begin{bmatrix}-6 & 0 & 0\\ 0 & -12 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

وبفحص المصفوفة $H|_{X_0}$ نجد أن المصفوفة تامة السالبية بالتـــالي النقطـــة X_0 نقطة نهاية عظمى.

ب) إذا اعتبرنا نقطة الاستقرار $X_1=(X_1=-1,\ \ X_2=2,\ \ X_3=0)$ فإن:

$$H|_{X_1}=\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & -12 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

وبفحص المصفوفة $H|_{X_1}$ نجد أن النقطة X_1 ليست نهاية عظمى أو صـــغرى أي أن X_1 قد تكون نقطة انقلاب أو ارتكاز. وبالمثل يمكن فحص باقي نقط الاستقرار.

وفي بعض الحالات عندما تكون مجموعة المعادلات:

$$\nabla f(X)=0$$

معادلات غير خطية قد يكون من الصعب حلها جبرياً - لذلك نلجأ في هذه الحالات إلى الطرق التقريبية العددية Approximate Numerical Methods لتحديـــد نقط الاستقرار وتعتبر طريقة نيـــوتن رافـــسون Newton-Raphson Method أحد وأهم هذه الطرق وسوف نقدمها في الفصل التالي.

<u>مثال (٩ – ٤)</u>: قامت أحدى شركات إنتاج أجهزة الكمبيوتر من نوع معين بتقدير عدد الأجهزة المطلوبة خلال عام في السوق من النوع الذي تقوم بإنتاجه الشركة فوجدت أن الكمية المطلوبة (Y) بالألف وحدة تعتمد على سعر الجهاز (X_1) بالألف جنيه، والذي تحدده الشركة، كذلك تعتمد على سعر نفس الجهاز من إنتاج شركتين آخرتين في السوق (أي وجود سلع بديلة) الشركة الأولى تبيع الجهاز بسعر (X_2) بالألف جنيه والشركة الأخرى تبيع الجهاز بسعر (X_3) بالألف جنيه أيضاً بحيث:

$$Y = 120 - 0.5\,X_1^2 - 0.4\,X_2^2 - 0.2\,X_3^2 + 10\,X_1 + 5\,X_2 + 4\,X_3$$

المطلوب: إيجاد سعر الجهاز من إنتاج الشركة ومن إنتاج الشركتين الآخرتين الذي يجعل الكمية المطلوبة أكبر ما يمكن ثم عقب على الناتج.

الحل: ١- تصبح المشكلة – أوجد X_1 , X_2 , X_3 التي تجعل:

$$\begin{aligned} \text{Max.}\,Y = 120 - 0.5\,X_1^2 - 0.4\,X_2^2 - 0.2\,X_3^2 \\ + 10\,X_1 + 5\,X_2 + 4\,X_3 \end{aligned}$$

٢- نوجد معادلات الاستقرار

$$\frac{\partial Y}{\partial X_1} = -1.0\,X_1 + 10 = 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial X_2} = -0.8\,X_2 + 5 = 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial X_3} = -0.4\,X_3 + 4 = 0$$

وبالتالي تصبح نقطة الاستقرار $(X_1 = 10,\ \ X_2 = 6.25,\ \ X_3 = 10)$

٣- نوجد المشتقات الجزئية من الترتيب الثاني للدالة Y عند نقطة الاستقرار على النحو التالي:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial X_1^2} = -1.0 \quad , \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial X_1\, X_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial X_2^2} = -0.8$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial X_1\, X_3} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial X_3^2} = -0.4 \quad , \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial X_2\, X_3} = 0$$

وبالتالي تصبح المصفوفة H (أنظر ملحق رقمB) على النحو:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن:

$$|h_1| = |-1.0| = -1.0 < 0$$

$$|h_2| = \begin{vmatrix} -1.0 & 0 \\ 0 & -0.8 \end{vmatrix} = 0.8 > 0$$

$$|h_3| = \begin{vmatrix} -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 \end{vmatrix} = 0.32 < 0$$

وبالتالي فإن النقطة (X_1 , X_2 , X_3) حيث:

$Y^* = 205,620$ وحدة

$X_1^* = 10,000$ جنيه , $X_2^* = 6,250$ جنيه , $X_3^* = 10,000$ جنيه

تصبح نهاية عظمى وبالتالي فإن أكبر حجم للطلب Y ، عندما يكون سعر بيع الوحدة (جهاز الكمبيوتر) من إنتاج الشركة يساوي 10,000 جنيه، وسعر بيع الوحدة في الشركة الأولي المنافسة 6250 جنيه، وسعر بيع الوحدة بالشركة الثانية المنافسة 10,000 جنيه ويكون أكبر حجم للطلب على إنتاج الشركة يساوي 205,620 جهاز.

(٩-٤) طريقة نيوتن رافسون

Newton-Raphson's Method

وتعتمد هذه الطريقة على تقريب المعادلات غير الخطية إلى معادلات خطية عند نقطة محددة ولتكن X^k باستخدام مفكوك تيلور - والانتقال من هذه النقطة إلى نقطة أخرى - كما يتضح فيما يلي:

إذا فرضنا أن مجموعة المعادلات في وضع الاستقرار على النحو التالي:

$$f_i(X) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \qquad (9.17)$$

معادلات مستقلة وغير خطية، X متجه في n من المتغيرات.

نفرض X^k نقطة معينة، وباستخدام مفكوك تيلور (أنظر ملحق D) لتقريب الدوال $f_i(X)$ تقريب خطى عند النقطة X^k يصبح على النحو التالي:

$$f_i(X) \approx f_i(X^k) + \nabla f_i(X^k)(X - X^k) \quad , i = 1, 2, ..., m \quad (9.18)$$

فنجد أن $f_i(X)$ تم تقريبها إلى دالة خطية في X عند النقطة X^k كما هو موضح في (9.18).

من (9.17) ، (9.18) نجد أن:

$$f_i(X^k) + \nabla f_i(X^k)(X - X^k) = 0 \quad , i = 1, 2, ..., m \qquad (9.19)$$

فإذا فرضنا أن المتجه العمودي A_k حيث:

$$A_k = f_i(X^k)$$

كذلك إذا فرضنا المصفوفة B_k حيث:

$$B_k = \nabla f_i(X^k) = \left[\left. \frac{\partial f_i(X)}{\partial X_j} \right|_{X^k} \right]_{m\times n} \qquad j = 1, 2, .., n \ , \ i = 1, 2, .., m$$

بالتعويض في (9.19) نجد أن:

$$A_k + B_k (X - X^k) = 0 \qquad (9.20)$$

وتحت افتراض أن المعادلات $f_i(X) = 0$ معادلات مستقلة فـإن المـصفوفة B_k تكون مصفوفة غير شاذة Nonsingular، وبضرب طرفي المعادلات (9.20) في المصفوفة B_k^{-1} نجد أن:

$$B_k^{-1} A_k + (B_k^{-1} B_k)(X - X^k) = 0 \longrightarrow$$

$$B_k^{-1} A_k + (X - X^k) = 0 \longrightarrow$$

$$X = X^k - B_k^{-1} A_k \qquad (9.21)$$

ومن المعادلة (9.21) نجد أننا حـصلنا علـى النقطـة X عـن طريـق النقطـة المحددة X^k.

فإذا رمزنا للنقطـة المحـددة مبـدئياً Initial Point بـالرمز $X^{(0)}$ - وبأستخدام المعادلة (9.21) نحصل على النقطة X ونرمز لها بالرمز $X^{(1)}$ أي بعد تطبيق (9.21) أول مرة. وبتكرار الإجراء عدد (k) من المرات نحصل على النقطة $X^{(k+1)}$ حيث:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - B_k^{-1} A_k$$

وينتهي الإجراء بعد m من التكرارات عندما:

$$X^{(m)} \approx X^{(m-1)} \qquad (9.22)$$

ومما سبق يمكن تلخيص خطوات الإجراء فيما يلي:

خوارزم (٩-١): ١- نفرض أن $t = 0$.

٢- تحديد النقطة $X^{(t)}$(عند $t = 0$ يتم افتراض النقطة $X^{(0)}$) ، والتعويض في $f_i(X)$ يتم حساب $A_{(t)}$.

٣- إيجاد المصفوفة B_t حيث:

$$B_t = \left[\left. \frac{\partial f_i(X)}{\partial X_j} \right|_{X^t} \right]$$

٤- ثم نوجد المصفوفة B_t^{-1}

٥- نحسب النقطة $X^{(t+1)}$ حيث:

$$X^{(t+1)} = X^{(t)} - B_t^{-1} A_t$$

٦- نختبر النقطة $X^{(t+1)}$، إذا كان:

أ) $X^{(t)} \approx X^{(t+1)}$ ينتهي الإجراء وتكون نقطة الاستقرار هي $X^{(t+1)}$.

ب) $X^{(t)} \not\approx X^{(t+1)}$ نضع $t = t + 1$ ، ونذهب للخطوة (٢).

وفي الفصل (٩-٦) سوف نقدم كيفية استخدام حزمة **Maple** للحصول على نقط الاستقرار باستخدام طريقة نيوتن رافسون.

مثال (٩-٥): أوجد نقط الاستقرار للدالة $F(X_1, X_2)$، حيث:

$$F(X_1, X_2) = X_1^3 + X_2^3 - 27\,X_1 - 48\,X_2$$

باستخدام طريقة نيوتن رافسون واعتبار النقطة المبدئية $X^{(0)}$ نقطة مبدئية حيث $X^{(0)} = (X_1 = 1,\ \ X_2 = 3)$. ثم قارن بين القيمة التقريبية $F(X_1, X_2)$ عند

القيمة التقريبية Approximated Value لنقطة الاستقرار والقيمـــة الدقيقـــة Exact Value.

الحل: باستخدام خوارزم (٩-١)

١- نوجد معادلات الاستقرار على النحو التالي:

$$f_1(X_1,X_2)=3\,X_1^2-27=0 \qquad (1)$$

$$f_2(X_1,X_2)=3\,X_2^2-48=0 \qquad (2)$$

التكرار الأول First Iteration

٢- نحسب $f_1(X_1,X_2)$, $f_2(X_1,X_2)$ عند $X^{(0)}$ حيث:

$$f_1(X^{(0)})=-24 \quad , \quad f_2(X^{(0)})=-21$$

وبالتالي فإن:

$$A_{(0)}=\begin{bmatrix}-24\\-21\end{bmatrix}$$

٣- نوجد المصفوفة B حيث:

$$B=\begin{bmatrix}6\,X_1 & 0\\0 & 6\,X_2\end{bmatrix}\longrightarrow$$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6\,X_1} & 0\\0 & \frac{1}{6\,X_2}\end{bmatrix}\longrightarrow$$

$$B_0^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & 0\\0 & \frac{1}{18}\end{bmatrix}$$

٤- نحسب $X^{(1)}$ على النحو التالي:

$$X^{(1)} = X^{(0)} - B_0^{-1} A_0$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{18} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -24 \\ -21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4.1666 \end{bmatrix}$$

وبما أن

$$X^{(1)} \not\approx X^{(0)}$$

<u>التكرار الثاني</u> **Second Iteration**

٢- نحسب $f_1(X^{(1)})$, $f_2(X^{(1)})$ على النحو:

$$f_1(X^{(1)}) = 48 \quad , \quad f_2(X^{(1)}) = 4.0667$$

وبالتالي فإن:

$$A_{(1)} = \begin{bmatrix} 48 \\ 4.0667 \end{bmatrix}$$

٣- نوجد $B_{(1)}^{-1}$ حيث:

$$B_{(1)}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{30} & 0 \\ 0 & \frac{1}{24.999} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0333 & 0 \\ 0 & 0.04 \end{bmatrix}$$

٤- نحسب $X^{(2)}$ على النحو التالي:

$$X^{(2)} = X^{(1)} - B_{(1)}^{-1}A_{(1)}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 \\ 4.1666 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0333 & 0 \\ 0 & 0.04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 4.0667 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3.4016 \\ 4.0039 \end{bmatrix}$$

وبما أن

$$X^{(2)} \not\approx X^{(1)}$$

التكرار الثالث Third Iteration

٢- نحسب $f_1(X^{(2)})$, $f_2(X^{(2)})$ على النحو:

$$f_1(X^{(2)}) = 7.712648 \quad , \quad f_2(X^{(2)}) = 0.09365$$

وبالتالي فإن:

$$A_{(2)} = \begin{bmatrix} 7.71265 \\ 0.09365 \end{bmatrix}$$

٣- نوجد $B_{(2)}^{-1}$ حيث:

$$B_{(2)}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.02161 & 0 \\ 0 & 1.77399 \end{bmatrix}$$

٤- نحسب $X^{(3)}$ على النحو التالي:

$$X^{(3)} = X^{(2)} - B_{(2)}^{-1}A_{(2)}$$
$$= \begin{bmatrix} 3.4016 \\ 4.0039 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.02161 & 0 \\ 0 & 1.77399 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7.71265 \\ 0.09365 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3.2493 \\ 3.8378 \end{bmatrix}$$

وبما أن

$$X^{(3)} \not\approx X^{(2)}$$

التكرار الرابع Fourth Iteration

٢- نحسب $f_2(X^{(3)})$, $f_1(X^{(3)})$ على النحو:

$$f_1(X^{(3)}) = 4.6739 \quad , \quad f_2(X^{(3)}) = -3.8139$$

وبالتالي فإن:

$$A_{(3)} = \begin{bmatrix} 4.6739 \\ -3.8139 \end{bmatrix}$$

٣- نوجد $B_{(3)}^{-1}$ على النحو:

$$B_{(3)}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0513 & 0 \\ 0 & 0.04349 \end{bmatrix}$$

٤- نحسب $X^{(4)}$ على النحو التالي:

$$\begin{aligned} X^{(4)} &= X^{(3)} - B_{(3)}^{-1} A_{(3)} \\ &= \begin{bmatrix} 3.2493 \\ 3.8378 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0513 & 0 \\ 0 & 0.04349 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.6739 \\ -3.8139 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3.0095 \\ 4.0033 \end{bmatrix} \qquad (3) \end{aligned}$$

وبما أن

$$X^{(4)} \not\approx X^{(3)}$$

التكرار الخامس Fifth Iteration

٢- نحسب $f_2(X^{(4)})$, $f_1(X^{(4)})$ على النحو:

$$f_1(X^{(4)}) = 0.1713 \quad , \quad f_2(X^{(4)}) = 0.0792$$

وبالتالي فإن:

$$A_{(4)} = \begin{bmatrix} 0.1713 \\ 0.0792 \end{bmatrix}$$

٣- نوجد $B_{(4)}^{-1}$ على النحو:

$$B_{(4)}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.05538 & 0 \\ 0 & 0.04163 \end{bmatrix}$$

٤- نحسب $X^{(5)}$ على النحو التالي:

$$\begin{aligned} X^{(5)} &= X^{(4)} - B_{(4)}^{-1} A_{(4)} \\ &= \begin{bmatrix} 3.0095 \\ 4.0033 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.05538 & 0 \\ 0 & 0.04163 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1713 \\ 0.0792 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3.00001 \\ 4.00000 \end{bmatrix} \qquad (4) \end{aligned}$$

من (3) ، (4) نجد أن:

$$X^{(5)} \approx X^{(4)}$$

بالتالي فإن:

$$X_1 = 3.00001 \quad , \quad X_2 = 4.00000 \qquad (5)$$

تعتبر نقطة أستقرار.

وبحل معادلات الاستقرار (2)،(1) تحليلياً نجد أن أحدى نقط الاستقرار الدقيقة Exact Point هي:

$$X_1 = 3.00 \quad , \quad X_2 = 4.00 \qquad (6)$$

وبفحص النقطة $(X_1 = 3 , X_2 = 4)$ نجد أنها نقطة نهاية صغرى، كذلك من (5)،(6) نجد أن نقطة الحل الدقيقة في (6) المناظرة لنقطة الحل التقريبي باستخدام نيوتن رافسون في (5)، متساويتين لأقرب 5 أرقام عشرية.

مثال (٩-٦): إذا فرضنا الدالة $F(X)$ حيث:

$$F(X) = X^3 - 6X^2 + 100$$

أ- أوجد باستخدام طريقة نيوتن رافسون نقطة استقرار للدالة $F(X)$ إذا كانت النقطة المبدئية $X^{(0)} = 3.5$.

ب- حدد نوع النقطة في (١).

الحل: أ-

$$f(X) = \frac{\partial F(X)}{\partial X} = 3X^2 - 12X = 0 \longrightarrow$$

$$f(X) = X^2 - 4X = 0$$

٢- نضع $t = 0$ فإن:

$$f(X^{(0)}) = (3.5)^2 - 4(3.5) = 12.25 - 14 = -1.75$$

$$f'(X^{(0)}) = 2X - 4 \longrightarrow f'(X^{(0)}) = 2(3.5) - 4 = 3$$

$$X^{(1)} = (3.5) - \frac{(-1.75)}{3} = 4.08$$

بما أن:

$$X^{(1)} \not\approx X^{(0)}$$

٣- نضع $t = 1$

$$f(X^{(1)}) = (4.08)^2 - 4(4.08) = 0.33$$

$$f'(X^{(1)}) = 2(4.08) - 4 = 4.16$$

$$X^{(2)} = X^{(1)} - \frac{f(X^{(1)})}{f'(X^{(1)})}$$

$$= 4.08 - \frac{0.33}{4.16} = 4.0007$$

بما أن:

$$X^{(2)} \not\approx X^{(1)}$$

نوجد بنفس الأسلوب $X^{(3)}$ حيث نجد أن:

$$X^{(3)} \approx X^{(2)}$$

وبالتالي فإن:

$$X = X^{(3)} = 4.00$$

ب- لتحديد نوع النقطة $X = 4$ نوجد:

$$\frac{\partial^2 F(X)}{\partial X^2} = 6X - 12$$

وتصبح المصفوفة $H|_{X=4}$ على النحو:

$$H|_{X=4} = [12] \longrightarrow |H| = 12 > 0$$

بالتالي فإن النقطة $X = 4$ نقطة نهاية صغرى.

(٩-٥) المشاكل المقيدة Constrained Problems

وكما ذكرنا سابقاً بالنسبة لحل مشاكل البرمجة غير الخطية نهدف إلى الحصول على نقط الاستقرار Stationary Points أولاً ثم تحديد النقط العظمى (أو الصغرى) النسبية Local Maximum (Minimum) Points ثم إيجاد النقط العظمى (أو الصغرى) المطلقة Global Maximum (Minimum) Points في بعض الحالات الخاصة مثل حالة دالة الهدف المحدبة Convex Function في حالة التصغير أو الدالة المقعرة Concave Function في حالة التعظيم.

وفي هذا الفصل حيث نتناول المشاكل المقيدة على النحو التالي:

$$\text{Max. (or Min.) } Z = f(X)$$

$$\text{S.T.} \quad g_i(X) \begin{matrix} \le \\ = \\ \ge \end{matrix} b_i \quad , \; i = 1, 2, \ldots, m$$

حيث $X = [X_1, X_2, \ldots, X_n]^T$

وهنا أيضاً نبحث عن نقط الاستقرار للدالة $f(X)$ التي تحقق القيود $g_i(X) \begin{matrix} \le \\ = \\ \ge \end{matrix} b_i$ ، بحيث $i = 1,2,\ldots,m$

وفي هذا الفصل سوف نميز بين حالتين:

- الحالة الأولى: عندما تكون جميع القيود في شكل متساويات (=) Equality Constraints.
- الحالة الثانية عندما تكون القيود في شكل متباينات Inequality Constraints أو خليط من المتساويات والمتباينات.

الحالة الأولى: القيود في شكل متساويات

في هذه الحالة تكون المشكلة على النحو التالي:

$$\text{Max. (or Min.) } Z = f(X)$$

$$\text{S.T.} \quad g_i(X) = b_i \quad , \ i = 1, 2, ..., m$$

وتوجد طرق متعددة لحل المشكلة أعلاه ومنها طرق تقليدية مثل:

- طريقة المشتقات المقيدة Constrained Derivatives (Jacobian) Method.
- طريقة معاملات لأجرانج Lagrange's Multipliers Method.

وفي هذا الباب سوف نتناول بالتفصيل طريقة معاملات لأجرانج لحل مشكلة البرمجة غير الخطية كإحدى الطرق التقليدية للحل وذلك لأهميتها في دراسة وتفسير بعض المشاكل الاقتصادية [49,48].

طريقة معاملات لأجرانج: تفترض هذه الطريقة أن كل من الدوال $f(X)$ ، $g_i(X)$ دوال متصلة قابلة للتفاضل من الترتيب الثاني.

ويتطلب استخدام طريقة معاملات لأجرانج:

١- تكون دالة لأجرانج $F(X,\lambda)$ على النحو التالي:

$$F(X,\lambda) = f(X) + \lambda\,[b - g(X)] \qquad (9.24)$$

حيث λ متجه معاملات لأجرانج، $g(X)$ متجه الطرف الأيسر للقيود، b متجه المقادير b_i، $i = 1,2,...,m$. وبذلك تم تحويل المشكلة المقيدة إلى مشكلة غير مقيدة.

٢- إيجاد الشروط الضرورية لتكون النقطة X_0 نقطة استقرار على النحو التالي:

$$\left.\frac{\partial F(X,\lambda)}{\partial X_j}\right|_{X_0} = \left.\frac{\partial f(X)}{\partial X_j}\right|_{X_0} - \lambda \left.\frac{\partial g(X)}{\partial X_j}\right|_{X_0} = 0 \ , j = 1,2,..,n \quad (9.25)$$

$$\frac{\partial F(X,\lambda)}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(X) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, .., m \qquad (9.26)$$

٣- لتحديد نوع نقطة الاستقرار (أي الشروط الكافية Sufficient Conditions) نوجد المصفوفة الهيسينية الحدودية وسوف نرمز لها بالرمز H^B Bordered Hessian Matrix حيث:

$$H^B = \begin{bmatrix} O & k \\ k^T & Q \end{bmatrix}_{(m+n)\times(m+n)} \qquad (9.27)$$

حيث K مصفوفة من الترتيب $(m \times n)$ على النحو:

$$K = \left[\frac{\partial g_i(X)}{\partial X_j}\right]_{m\times n} \qquad (9.28)$$

والمصفوف Q من الترتيب $(n \times n)$ حيث:

$$Q = \left[\frac{\partial^2 F(X,\lambda)}{\partial X_i \, \partial X_j}\right]_{n\times n} \qquad (9.29)$$

كذلك O مصفوفة صفرية.

٤- الشروط الكافية لتكون نقطة الاستقرار نهاية عظمى أو نهاية صغرى يتم تحديد إشارات المحيددات القطرية الأساسية (n-m) الأخيرة للمصفوفة الهيسينية الحدودية H^B في حالة $n > m$ على النحو التالي [47,52]:

أ- تكون نقطة الاستقرار نهاية عظمى إذا كانت المحيددات على القطر الرئيسي للمصفوفة H^B الأخير وعددها يساوي (n-m) بحيث تبدأ هذه المحيددات بمحيدد بالترتيب (2m+1) ولها إشارة تبادلية تبدأ بالإشارة $(-1)^{m+1}$.

ب-تكون نقطة الاستقرار نهاية صغرى إذا كانت المحيددات على القطر الرئيسي للمصفوفة H^B الأخير وعددها يساوي (n-m) بحيث تبدأ هذه المحيددات بمحيدد بالترتيب (2m+1) ولكل فيها الإشارة $(-1)^m$.

ج- فيما عدا ذلك تكون نقطة انقلاب **Inflection Point** أو نقطة ارتكاز **Saddle Point**.

وسوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي.

<u>مثال (٩-٧):</u>

$$\text{Min.} f(X) = X_1^2 + 2X_2^2 + 10X_3^2$$

$$\text{S.T.} \quad X_1 + X_2^2 + X_3 = 5$$

$$X_1 + 5X_2 + X_3 = 7$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

الحل: ١- نكون دالة لأجرانج على النحو التالي:

$$F(X_1, X_2, X_3, \lambda_1, \lambda_2) = X_1^2 + 2X_2^2 + 10X_3^2 + \lambda_1[5 - X_1 - X_2^2 - X_3] + \lambda_2[7 - X_1 - 5X_2 - X_3]$$

٢- وللحصول على نقط استقرار نوجد المشتقات الجزئية الأولى للدالة L علـــى النحو التالي:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial X_1} &= 2X_1 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial X_2} &= 4X_2 - 2\lambda_1 X_2 - 5\lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial X_3} &= 20X_3 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= 5 - X_1 - X_2^2 - X_3 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= 7 - X_1 - 5X_2 - X_3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

وبحل المعادلات (1) نحصل على نقط الاستقرار التالية:

$$X_1^* = 4.09,\ X_2^* = 0.7071,\ X_3^* = 0.409,\ \lambda_1^* = 5.9355,\ \lambda_2^* = 2.2445$$

<u>ملحوظة</u>: بما أن $X_1, X_2, X_3 \geq 0$ لذا تم رفض النقط التي عندها $X_2 < 0$.

٣- وبالتالي فإن المصفوفة $K_{2.3}$ على النحو التالي:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 2X_2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1.4142 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$K^{\backprime} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.4142 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

٤- نوجد المصفوفة $Q_{3\cdot 3}$ حيث:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial X_1 \partial X_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial X_1 \partial X_3} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial X_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial X_2 \partial X_3} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial X_3 \partial X_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial X_3 \partial X_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial X_3^2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

٥- وتصبح المصفوفة الحدودية $H^B_{5\cdot 5}$ على النحو التالي:

$$H^B = \begin{bmatrix} O & K \\ K^{\backprime} & Q \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1.4142 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1.4142 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 20 \end{array}\right]_{5\cdot 5}$$

٥- وبما أن $n - m = 3 - 2 = 1$ لذا فإننا سوف نختبر المحدد $\left|H^B\right|$ حيث:

$$\left|H^B\right| = +215.148 > 0$$

إذن النقطة $(X_1^* = 4.09,\ X_2^* = 0.7071,\ X_3^* = 0.409)$ نقطة نهاية صغرى.

حيث $(-1)^m = (-1)^2 = +1$.

<u>مثال (٩-٨)</u>: اعتبر النموذج التالي:

$$\text{Max.}f(X) = 25 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2$$
$$\text{S.T.} \quad 4X_1 + 2X_2 + X_3 = 8$$

الحل: ١- دالة لأجرانج:

$$L(X_1, X_2, X_3, \lambda) = 25 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 + \lambda[8 - 4X_1 - 2X_2 - X_3]$$

٢- نوجد المشتقات الجزئية الأولى لتحديد نقط الاستقرار

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial X_1} &= -2X_1 - 4\lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial X_2} &= -2X_2 - 2\lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial X_3} &= -2X_3 - \lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 8 - 4X_1 - 2X_2 - X_3 = 0
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

وبحل مجموعة المعادلات (1) نجد أن نقطة الاستقرار هي:

$$X_1^* = \frac{32}{13},\quad X_2^* = \frac{16}{13},\quad X_3^* = \frac{8}{13},\quad \lambda^* = \frac{-16}{13}$$

٢- نوجد المصفوفة K حيث:

$$K = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow K^{\backslash} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

كذلك المصفوفة Q حيث:

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

٣- وبالتالي تصبح المصفوفة الحدودية $H^B_{4\cdot4}$ على النحو التالي:

$$H^B = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 4 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

٤- وبما أن $n - m = 3 - 1 = 2$ ، بالتالي نوجد المحيددين الأخيرين عند نقطة الاستقرار فنجد أن:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 40 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -84 < 0$$

وبما أن $+ = (-1)^2 = (-1)^{m+1}$ أي الإشارة تبادلية - , + إذن النقطة نقطة نهاية عظمى.

تفسير معاملات لأجرانج

Interpretation of the Lagrange Multipliers

إذا فرضنا أن X^* هي نقطة الحل الأمثل المطلق للدالة $Z = f(X)$ فإن:

$$\frac{\partial Z^*}{\partial b_i} = \lambda_i^* \tag{9.30}$$

والقيد (9.30) يعنى أن معامل لأجرانج المناظر للقيد (i) قيمته في الحل الأمثل تعطى معدل تغير دالة الهدف Z^* بالنسبة لتغير المعلمة b_i عند الحل الأمثل X^* وسوف نوضح ذلك من خلال الأمثلة التالية. وتعتبر معاملات لجرانج من المؤشرات الهامة المستخدمة في المشاكل الاقتصادية والاجتماعية.

<u>الحالة الثانية: القيود في شكل متباينات أو خليط من المتباينات والمتساويات</u>

وفي حالة إذا كانت القيود الهيكلية في شكل متباينات ($\leq$ أو $\geq$) أو خليط من المتباينات والمتساويات، في هذه الحالة يتم تحويل المتباينات إلى متساويات بإضافة متغيرات مكملة غير سالبة ثم تطبيق طريقة لأجرانج في حالة القيود في شكل متساويات ويتم ذلك على النحو التالي [47]:

١ - إذا كانت المشكلة الأصلية:

$$\text{Max. (or Min.) } Z = f(X) \tag{9.31}$$

$$\text{S.T.} \quad \left.\begin{aligned} g_i(X) &\leq 0 \quad , \quad i = 1, 2, ..., r \\ g_i(X) &\geq 0 \quad , \quad i = r+1, ..., t \\ g_i(X) &= 0 \quad , \quad i = t+1, ..., m \end{aligned}\right\} \tag{9.32}$$

٢- إضافة S_i^2 للقيود لتحويلها إلى متساويات على النحو:

$$\left.\begin{array}{ll} g_i(X)+S_i^2=0 & , \quad i=1,2,...,r \\ g_i(X)-S_i^2=0 & , \quad i=r+1,...,t \\ g_i(X)=0 & , \quad i=t+1,...,m \end{array}\right\} \qquad (9.33)$$

٣- وتصبح دالة لأجرانج L على النحو التالي:

$$L(X,S,\lambda)=f(X)-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i[g_i(x)+S_i^2]-\sum_{i=r+1}^{t}\lambda_i[g_i(x)-S_i^2] - \sum_{i=t+1}^{m}\lambda_i[g_i(x)] \qquad (9.34)$$

٤- إتباع نفس الخطوات في الحالة الأولى للحصول على .Max أو .Min للدالة $L(X,S,\lambda)$ وهي نفس .Max أو .Min للدالة $f(X)$ [20].

وقد قدم كل من كــون–تــوكر Kuhan-Tucker الــشروط الــضرورية Necessary Condition للحصول على نقط اســتقرار Stationary Points لمشاكل البرمجة غير الخطية في (9.32)-(9.31) بعد تحويــل المتباينــات إلــى متساويات في (9.33) على النحو التالي:

<u>أولاً:</u> الشروط الضرورية تحقيق العلاقات (9.35):

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial L(X,S,\lambda)}{\partial X_j}=0 & , \quad j=1,2,...,n \\ \dfrac{\partial L(X,S,\lambda)}{\partial S_i}=0 & , \quad i=1,2,...,m \\ \dfrac{\partial L(X,S,\lambda)}{\partial \lambda_i}=0 & , \quad i=1,2,...,m \end{array}\right\} \qquad (9.35)$$

كذلك أثبتنا أن الشروط الضرورية تكون أيضاً شروط كافية Sufficient Conditions في الحالات الخاصة التالية [47,52]:

١- إذا كان فراغ الحل Solution Space (منطقة الحلول الممكنة) للقيود في (9.32) فئة محدبة، ودالة الهدف f(X) دالة محدبة Convex Function فإن النقطة (أو النقط) التي تحقق المعادلات (9.35) تكون نقطة نهاية صغرى مطلقة Minimum Global Solution.

٢- إذا كان فراغ الحل (منطقة الحلول الممكنة) للقيود في (9.32) فئة محدبة، ودالة الهدف f(X) دالة مقعرة Concave Function فإن النقطة (أو النقط) التي تحقق المعادلات (9.35) تكون نقطة (أو نقط) نهاية عظمى مطلقة Maximum Global Solution.

ويمكن تلخيص هذه النتائج في الجدول التالي:

جدول (٩-١)

الحالة	F(X)	g(X)	نوع الحل
1) Max.	مقعرة Concave	فئة محدبة	نهاية عظمى مطلقة Global Maximum Solution
2) Min.	محدبة Convex	فئة محدبة	نهاية صغرى مطلقة Global Minimum Solution

<u>مثال (٩-٩)</u>:

$$\text{Max.}Z = 2X_1^2 - 7X_2^2 + 12X_1X_2 \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad 2X_1 + 5X_2 \le 98 \qquad (2)$$

الحل: ١) من الدالة (1) يتضح أن الدالة Z دالة مقعرة (أنظـر تعريـف (B-١) بملحق رقم B)

٢) نحول القيد إلى متساوي فيصبح على النحو:

$$2X_1 + 5X_2 + S_1^2 = 98$$

٣) نكون دالة لأجرانج:

$$L(X,\lambda,S) = 2X_1^2 - 7X_2^2 + 12X_1X_2 - \lambda[2X_1 + 5X_2 + S_1^2 - 98] \quad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = 4X_1 + 12X_2 - 2\lambda = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = -14X_2 + 12X_1 - 5\lambda = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial S_1} = -2S_1\lambda = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2X_1 + 5X_2 + S_1^2 = 98 \quad (7)$$

<u>الحالة (١)</u>: من المعادلة رقم (6) نجد أن المعادلة تتحقق إذا كان واحد على الأقل من S_1، λ يساوي صفر، أي:

$$S_1 = 0 \quad \text{أو} \quad \lambda = 0$$

من القيدين (2)،(3) نجد أن $X_1 = X_2 = 0$ وهذا لا يحقق المعادلة (7).

<u>الحالة (٢)</u>: إذا كان $\lambda \neq 0$ فإن $S_1 = 0$ (وهى الحالة لتحقيق القيد 2) فإن مـن المعادلة (7) نجد أن:

$$X_2 = \frac{98 - 2X_1}{5} \qquad (6)$$

بالتعويض بـ X_2 في المعادلتين (5)،(4) نجد أن:

$$X_1^* = 44 \quad , \quad X_2^* = 2 \quad , \quad \lambda^* = 100 \quad , \quad Z^* = 4396$$

وبما أن $\lambda^* = 100$ فهذا يعنى أن الطرف الأيمن في القيد (2) إذا تغير بوحدة واحدة (بالزيادة أو النقص) سوف يؤدى ذلك إلى زيادة أو نقص Z^* بـ 100 وحدة.

مثال (٩-١٠): باستخدام شروط كون – توكر أوجد الحل الأمثل للنموذج التالي :[44]

$$\begin{aligned} \text{Max.}Z &= -X_1^2 + 2X_1 + X_2 \\ \text{S.T.} \quad & 2X_1 + 3X_2 \le 6 \\ & 2X_1 + X_2 \le 4 \\ & X_1 \ge 0 \quad , \quad X_2 \ge 0 \end{aligned}$$

الحل: ١- يمكن تحويل القيود $X_1 \ge 0 \quad , \quad X_2 \ge 0$ على النحو:

$$-X_1 \le 0 \quad , \quad -X_2 \le 0$$

٢- نكون دالة لأجرانج على النحو:

$$\begin{aligned} L(X_1, X_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, S_1, S_2, S_3, S_4) &= -X_1^2 + 2X_1 + X_2 \\ & - \lambda_1[2X_1 + 3X_2 + S_1^2 - 6] - \lambda_2[2X_1 + X_2 + S_2^2 - 4] \\ & - \lambda_3[-X_1 + S_3^2] - \lambda_4[-X_2 + S_4^2] \qquad (1) \end{aligned}$$

٣- نوجد نقط الاستقرار على النحو:

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = -2X_1 + 2 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = 1 - 3\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 2X_1 + 3X_2 + S_1^2 - 6 = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 2X_1 + X_2 + S_2^2 - 4 = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = -X_1 + S_3^2 = 0 \qquad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_4} = -X_2 + S_4^2 = 0 \qquad (7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial S_1} = -2\lambda_1 S_1 = 0 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial S_2} = -2\lambda_2 S_2 = 0 \qquad (8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial S_3} = -2\lambda_3 S_3 = 0 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial S_4} = -2\lambda_4 S_4 = 0 \qquad (9)$$

ولكي تتحقق القيود (5),(4) في شكل متساويات فإن $S_1 = S_2 = 0$ ومن (8) فإنه يمكن أن يكونا $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$. وإذا كانت $X_1 = X_2 = 0$ فلا تتحقق القيود (5),(4) بالتالي فإن $S_3, S_4 \neq 0$ وهذا يعنى من القيد (9) أنه لأبد أن $\lambda_3 = 0 \; , \; \lambda_4 = 0$. ويكون الحل الأمثل على النحو:

$$Z^* = \frac{5}{4},\ X_1^* = \frac{3}{2},\ X_2^* = 1,\ \lambda_1^* = \frac{5}{2},\ \lambda_2^* = \frac{-13}{2},\ \lambda_3^* = 0,\ \lambda_4^* = 0$$

$$S_1^* = 0 \; , \; S_2^* = 1.054 \; , \; S_3^* = 0.3165 \; , \; S_4^* = 1.247$$

مما سبق يتضح أنه قد توجد صعوبة في حل معادلات الاستقرار التي يمكن منهـا الحصول على نقط الاستقرار:

$$\frac{\partial L}{\partial X_j}=0 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}=0 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial S_i}=0$$

وبصفة خاصة إذا كانت هذه المعادلات معادلات غير خطية وحجم المشكلة كبيـر. لذلك قدمت عديد من الخوارزميات للحصول على حلول تقريبية لمشاكل البرمجـة غير الخطية وفقاً لخصائص المشكلة.

<u>ملحوظة</u>: ١- لتحديد نوع نقطة الاستقرار (عظمى، أو صـغري، أو غيـر ذلـك) يتطلب ذلك إيجاد المصفوفة H^B عند نقطة الاستقرار X^*.

٢- وكما ذكرنا سابقاً، بالنسبة لمشاكل البرمجة غير الخطيـة التـي لا تحقق شروط كوهين-توكر فإنـه توجـد أسـاليب أخـرى يمكـن استخدامها للحصول على الحل الأمثـل مثـل البرمجـة الهندسـية Geometric Programming . والذي سوف نتناوله في الباب التالي

(٩-٦) الحل باستخدام الحاسب (الحزم الجاهزة)
Computer Solution

باستخدام حزمة Maple 11 كما هو موضح في ملحق رقم (F) سوف نوضح حل بعض الأمثلة السابق تقديمها في هذا الباب باستخدام الأوامر المقدمة في ملحق (F) على النحو التالي.

مثال (٩-١١): اعتبر مثال (٩-٣) حيث

$$\text{Max. } f = -X^3 - Y^3 - Z^3 + 3X + 12Y - \frac{3}{2}Z$$

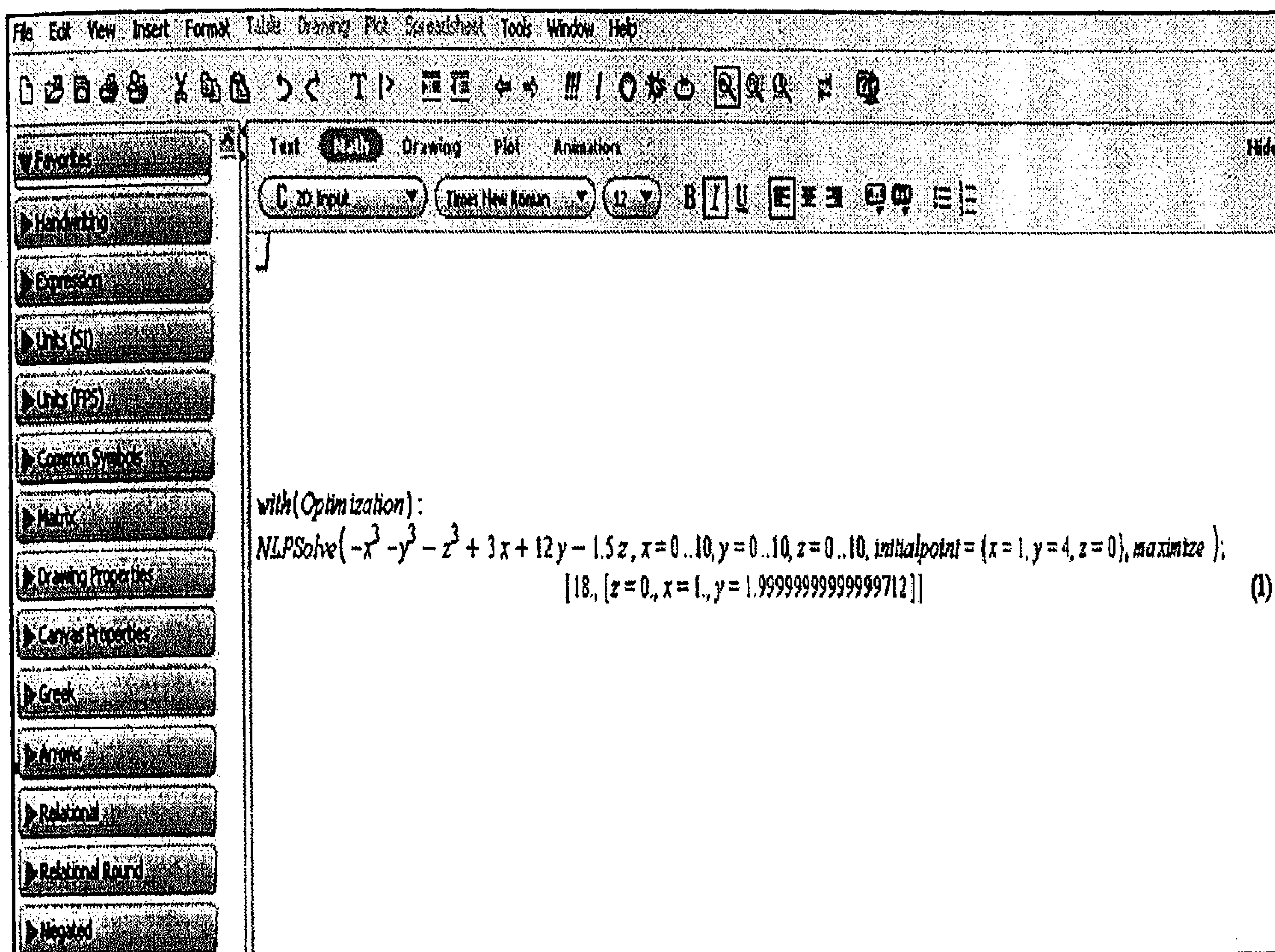
باستخدام حزمة Maple 11 – أوجد حل المشكلة.

الحل: بالرجوع إلى ملحق رقم (F) فإنه يمكن استخدام أمر إدخال البيانات في (f.3) ويتم إدخال البيانات ثم الضغط على مفتاح Enter من لوحة المفاتيح للحصول على المخرجات ويتطلب إدخال البيانات تحديد الفترة التي يقع فيها كل متغير من المتغيرات X,Y,Z فإذا اعتبرنا $0 \le X \le 10$، $0 \le Y \le 10$، $0 \le Z \le 10$.

كذلك تحديد النقطة المبدئية Initial Point فإذا فرضنا أن $X = 1\ ,\ Y = 4\ ,\ Z = 0$.

وشكل (٩-٢) يوضح أمر إدخال البيانات والحصول على النتائج.

شكل (٩-٢)



ومن الشكل يتضح أن الحل الأمثل:

$$f^* = 18 \;,\; X = 1 \;,\; Y^* = 1.99999 \approx 2 \;,\; Z^* = 0$$

ملحوظة: النتيجة أعلاه هي نفس الحل السابق بعد الحصول عليه في مثال (٩-٣) بحل المشكلة يدوياً.

<u>مثال (٩-١٢)</u>: اعتبر مثال (٩-٥) بحيث

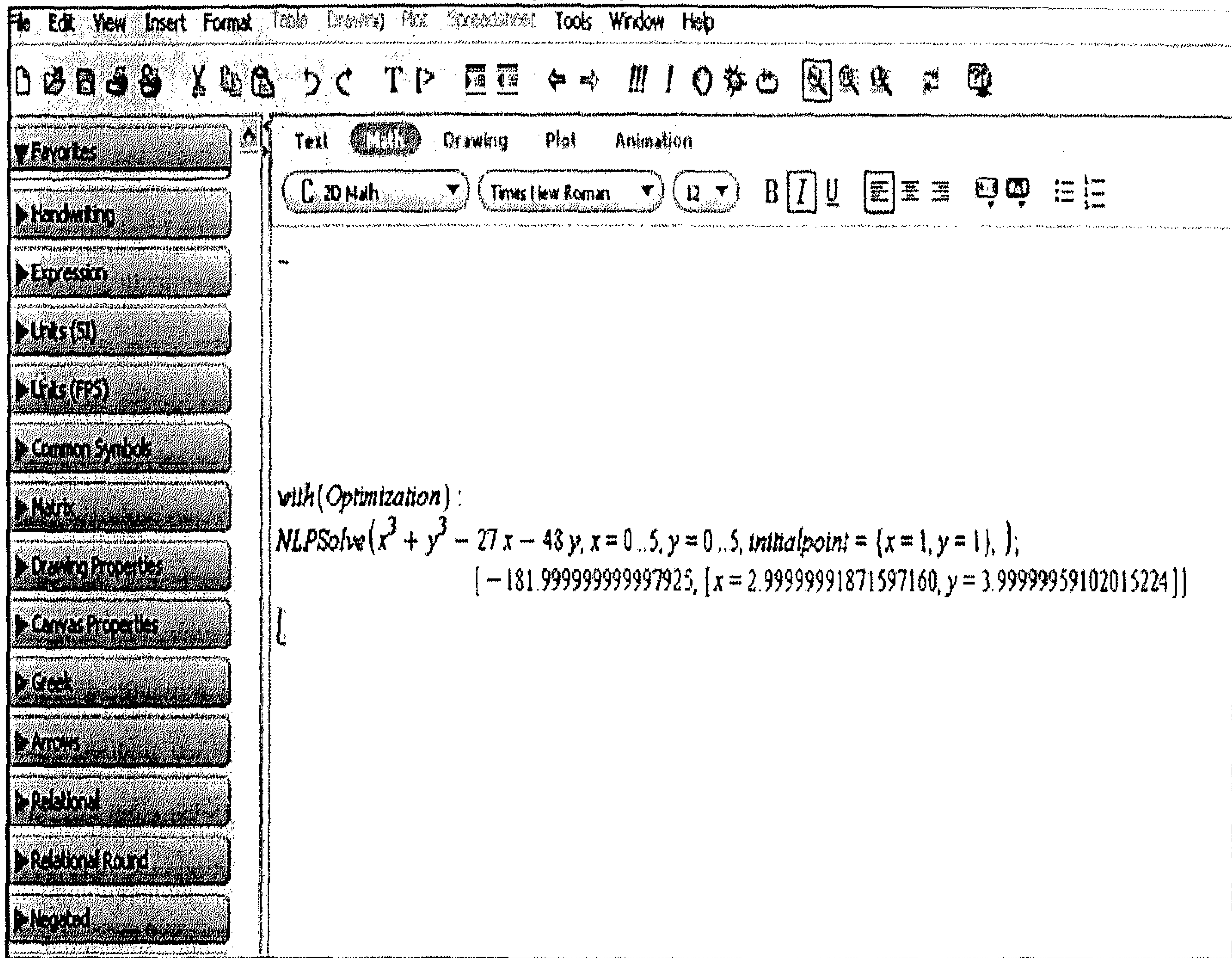
$$\text{Min.}Z = X^3 + Y^3 - 27X - 48Y$$

بحيث $0 \le X \le 5$ ، $0 \le Y \le 5$ ، والنقطة المبدئية $(X = 1 \;,\; Y = 1)$

المطلوب: باستخدام حزمة Maple 11 أوجد الحل الأمثل.

الحل: بنفس الخطوات في المثال السابق ونفس أمر إدخال البيانات نحصل على الحل الأمثل كما هو موضح في الشكل التالي.

شكل (٩-٣)



وفي الشكل يتضح أن:

$$Z^* = -181.999999 \approx -182$$

$$X^* = 2.999999 \approx 3$$

$$Y^* = 3.999999 \approx 4$$

وهي نفس النتيجة السابق الحصول عليها في مثال (٩-٥) بحل المشكلة يدوياً.

مثال (٩-١٣): اعتبر مثال (٩-٧) حيث

$$\text{Min. } f = X^2 + 2Y^2 + 10Z^2$$

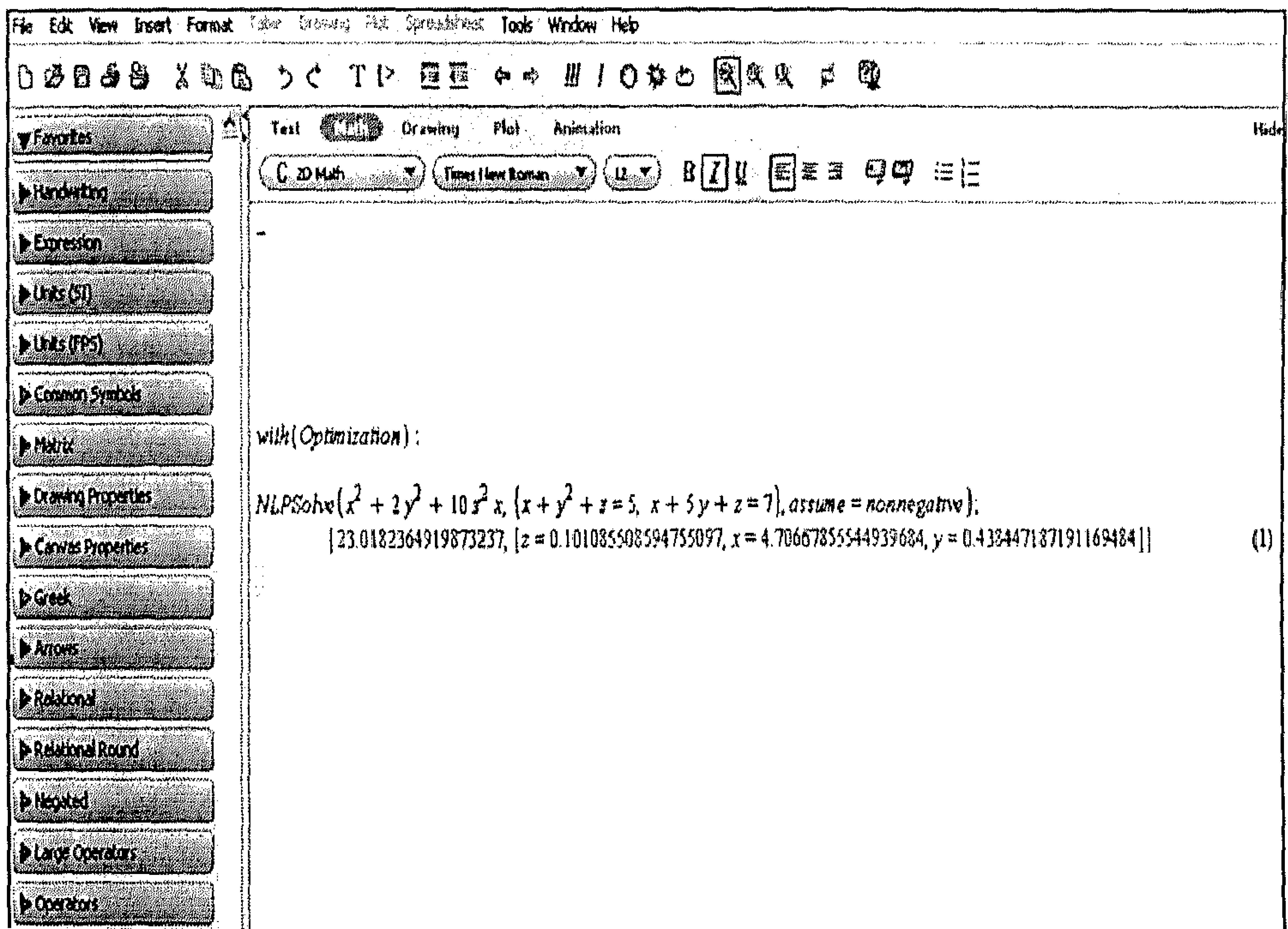
$$\text{S.T.} \quad X + Y^2 + Z = 5$$

$$X + 5Y + Z = 7$$

$$X, Y, Z \geq 0$$

الحل: بنفس الخطوات في المثال السابق ونفس أمر إدخال البيانات نحصل على الحل الأمثل كما هو موضح في الشكل التالي.

شكل (٩-٤)



ومن الشكل يتضح أن الحل الأمثل:

$$f = 21.4 \ , \ X = 4.37 \ , \ Y = 0.44 \ , \ Z = 0.44$$

ملحوظة: وهي نفس النتائج التي تم الحصول عليها في حل مثال (٩-٧) يدوياً.

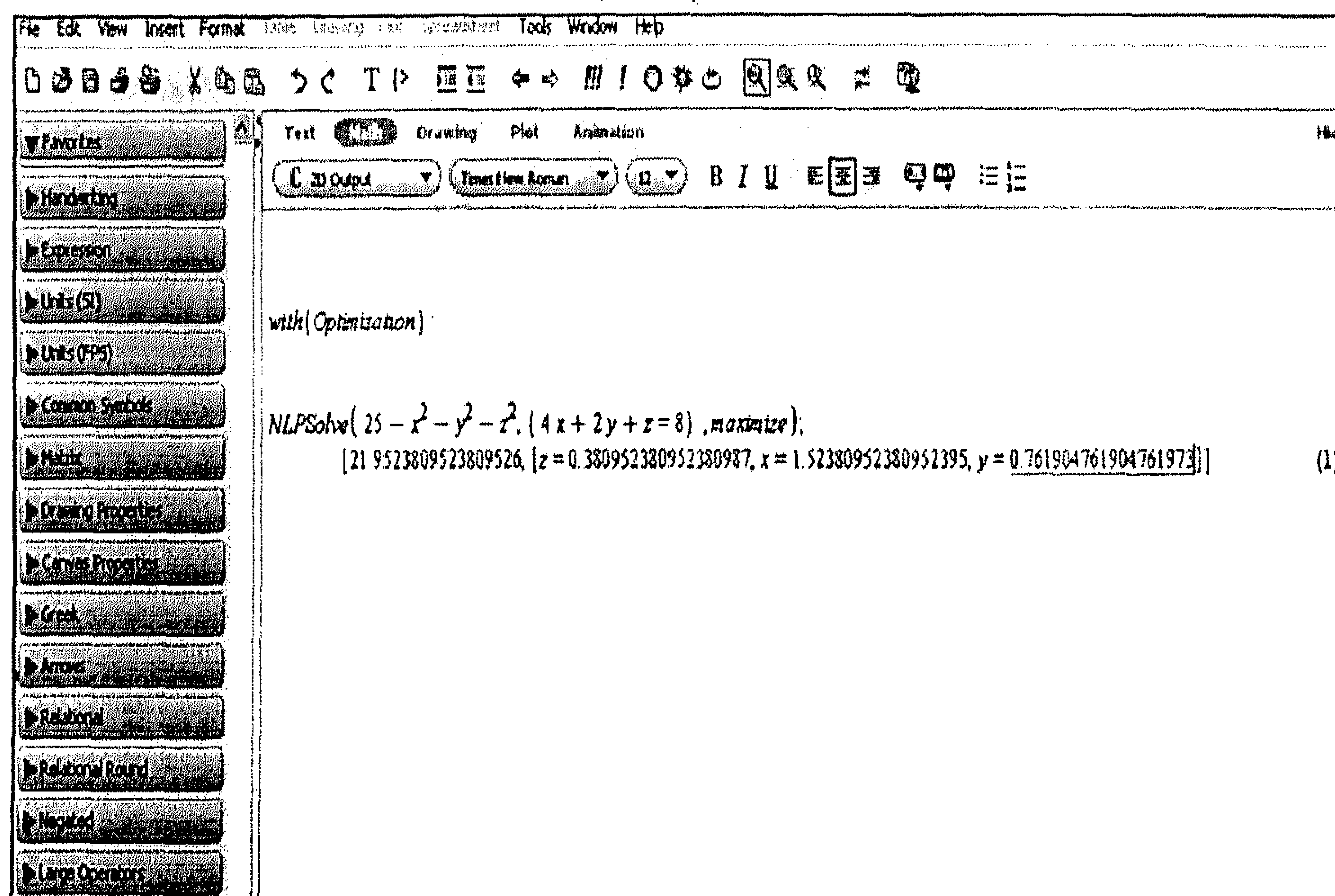
<u>مثال (٩-١٤):</u> اعتبر مثال (٩-٨) حيث:

$$\text{Max. } f = 25 - X^2 - Y^2 - Z^2$$

$$\text{S.T.} \quad 4X + 2Y^2 + Z = 8$$

الحل: بنفس الخطوات في المثال السابق ونفس أمر إدخال البيانات نحصل على الحل الأمثل كما هو موضح في الشكل التالي.

شكل (٩-٥)



ومن الشكل يتضح أن الحل الأمثل:

$$f^* = 21.95 \ , \ X = 1.52 \ , \ Y = 0.76 \ , \ Z = 0.38$$

وهي نفس النتائج التي تم الحصول عليها في حل مثال (٩-٨) يدوياً.

<u>مثال (٩–١٥)</u>: اعتبر المشكلة

$$\text{Max. } f = X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2$$

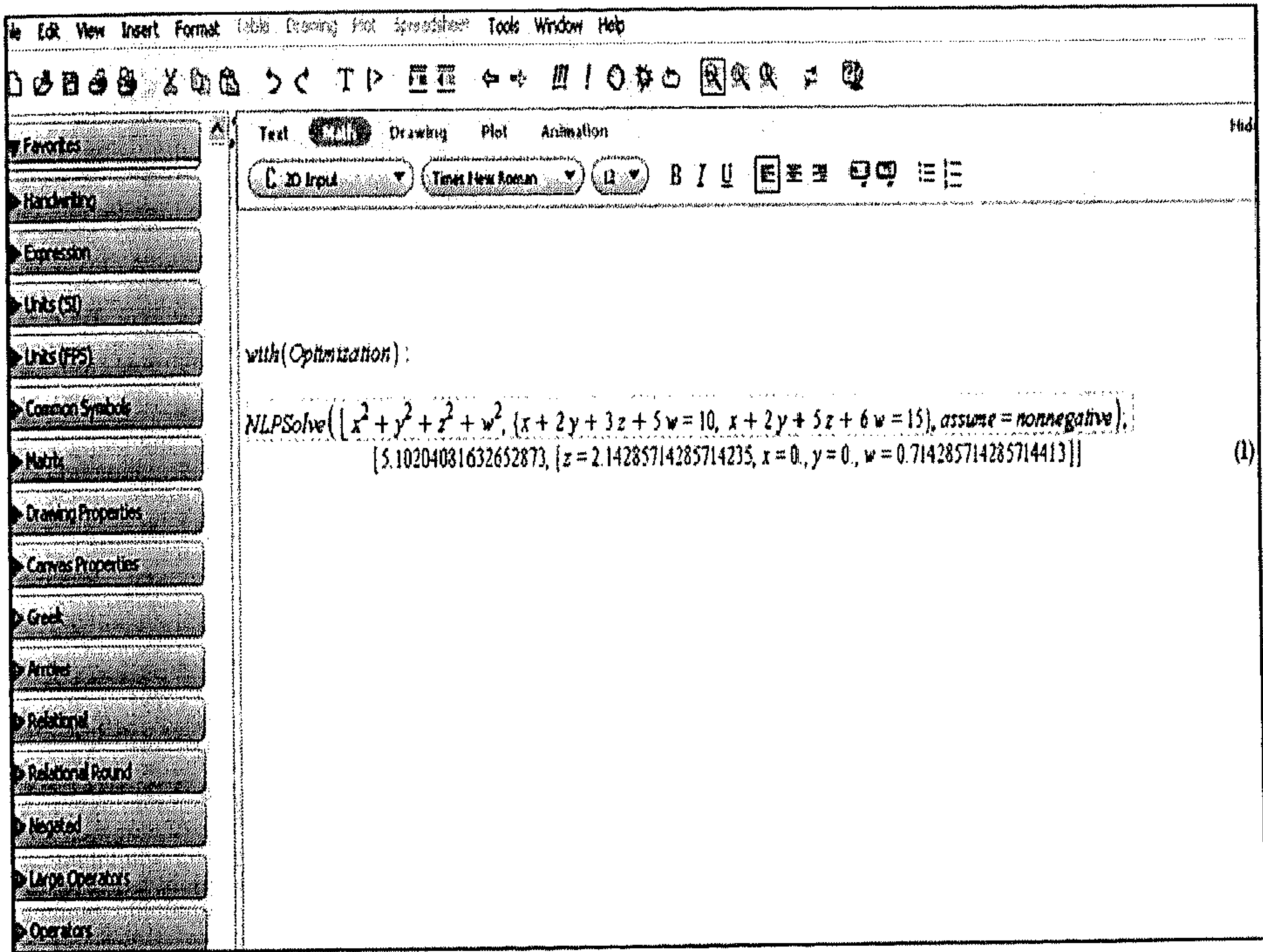
$$\text{S.T.} \quad X + 2Y + 3Z + 5W = 10$$

$$X + 2Y + 5Z + 6W = 15$$

$$X, Y, Z, W \geq 0$$

الحل: بنفس الخطوات في المثال السابق ونفس أمر إدخال البيانات نحصل على الحل الأمثل كما هو موضح في الشكل التالي.

شكل (٩–٦)



ومن الشكل يتضح أن الحل الأمثل:

$$f^* = 5.102 \ , \ X^* = 0 \ , \ Y^* = 0 \ , \ W^* = 0.71 \ , \ Z^* = 2.14$$

(٩-٧) تمرينات Exercises

(٩-١): اعتبر مشاكل البرمجة غير الخطية التالية - استخدم طريقة لأجرانج للحصول على الحل الأمثل إن وجد في المشاكل التالية:

(1) $\text{Min.}Z = 2X_1^2 - 24X_1 + 2X_2^2 - 8X_2 + 2X_3^2 - 128X_3 + 200$

S.T. $X_1 + X_2 + X_3 = 1$

(2) $\text{Min.}Z = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2$

S.T. $4X_1 + X_2^2 + 2X_3 = 14$

(3) $\text{Max.}Z = -X_1^2 - X_2^2 + 8X_1 + 10X_2$

S.T. $9X_1 + 6X_2 = 18$

(٩-٢): استخدم شروط كوهين-توكر للحصول على الحل الأمثل للمشاكل التالية:

(1) $\text{Max.}Z = 7X_1^2 + 6X_1 + 5X_2$

S.T. $X_1 + 2X_2 \le 10$

$X_1 - 3X_2 \le 9$

$X_1 \ge 0 \quad , \quad X_2 \ge 0$

(2) $\text{Max.}Z = 12 - 12X_1 + 4X_1^2 - 12X_1X_2 + 4X_2^2$

S.T. $X_1 + X_2 \le 2$

$X_1, X_2 \ge 0$

(3) $\text{Max.}Z = X_1^2 + 2X_1 + X_2^2 + 2X_2 + 5$

S.T. $0 \le X_1 \le 2$

$0 \le X_2 \le 1$

(4) $Max.Z = -8X_1 + 2X_1^2 - 4X_1X_2 + 4X_2^2$

S.T. $2X_1 + X_2 \le 6$

$X_1 - 4X_2 \le 0$

$X_1, X_2 \ge 0$

(٩-٣): باستخدام طريقة لأجرانج حل النماذج التالية:

(1) $Max.Z = 4X_1 + 2X_1X_2 + 6X_2$

S.T. $X_1^2 + X_2 = 3$

(2) $Min.Z = X_1 + X_2 + X_3$

S.T. $X_1^2 + X_2 = 5$

$X_1 + 3X_2 + 2X_3 = 9$

(٩-٤): باستخدام شروط كوهين-توكر حل النماذج التالية:

(1) $Min.Z = X_1^2 + 5X_2^2 + 10X_3^2 - 4X_1X_2 + 6X_1X_3$
$- 12X_2X_3 - 2X_1 + 5X_3$

S.T. $2X_1 + 4X_2 + 2X_3 - 8 \ge 0$

$X_1, X_2, X_3 \ge 0$

(2) $Max.Z = -12X_1^2 - 28X_2^2 - 55X_3^2 - 56X_1X_2$
$- 46X_1X_3 + 24X_2X_3$

S.T. $X_1 + X_2 + X_3 \le 1000$

$X_1 + X_2 + X_3 \ge 100$

$X_1, X_2, X_3 \ge 0$

الباب العاشر

البرمجة الهندسية

Geometric Programming (GP)

(١٠-١) ما هي البرمجة الهندسية What is GP

يعتبر أسلوب البرمجة الهندسية GP أحد أساليب البرمجة غير الخطيـة، وهو يعتبر أسلوب حديث نسبياً لحل مشاكل البرمجة غير الخطية.

وقد قدم أسلوب GP لأول مـرة سـنة ١٩٦١م، عنـدما واجـه العـالم Clarence Zener المدير العلمي لمؤسسة وسـتنج هـوس Westinghouse Corporation' عدد من مشاكل التصميم الهندسـي التـي تتـضمن مجموعـة لمكونات التكاليف، حيث تأخذ هذه المشاكل شكل البرمجة غيـر الخطيـة المعقـدة نسبياً. وبتعاون Clarence Zener مع عالم الرياضيات Richard Duffin في جامعة ميلانو .Mellon Univ الذي كان مهتم في هذا التوقيت بالنظرية الثنائيـة Duality Theory للمشاكـل غيـر الخطية وتطبيقاتها وجد Duffin أن مشاكل التصميم الهندسي في وستنج هـوس هـي تطبيقـات للنظريـة الثنائيـة التـي قدمها.وتعتمد الطرق التي قدمها Duffin وتلاميذه لتطبيق هـذه النظريـة علـى المتباينة الحـسابية الهندسـية Arithmetic-Geometric Inequality [13] حيث توضح هذه المتباينة العلاقة بين المتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي لعدد محدد من الحدود الموجبة.

الوسط الهندسي $\leq$ الوسط الحسابي

ومن هنا سمى هذا الأسلوب للبرمجة غير الخطية بالبرمجة الهندسية حيث ترجـع هذه التسمية إلى:

- أول تطبيقاته أستخدم في حل مشاكل التطبيقات الهندسية.
- أنه يعتمد على المتباينة الحسابية الهندسية.

وفي سنة ١٩٦٧م قدم كل من Duffin, Peterson, and Zener أول مرجع في أسلوب البرمجة الهندسية يشتمل على النظريات وأمثلة توضيحية [26] حيث تناول هذا المرجع المشاكل ذات الحدود الموجبة فقط Posynomial Terms ثم طور كل من Wilde, Passy كلاً على حدة في نفس التوقيت النظريات والطرق لحل المشاكل ذات الحدود الموجبة والسالبة أيضاً مما أدي إلى حل كثير من المشاكل الحقيقية بهذا الأسلوب.

وفي سنة ١٩٧٦م نشر كل من Beighter and Phillips مرجع البرمجة الهندسية التطبيقية [19] تحت عنوان Applied Geometric Programming يتناول العديد من التطبيقات الفعلية لأسلوب البرمجة الهندسية.

ويعتبر أسلوب البرمجة الهندسية من الأساليب الهامة التي يمكن استخدامها في حل كثير من المشاكل الفعلية نظراً لتعقد الصياغات الرياضية لهذه المشاكل [13].

وفي هذا الباب سوف نقدم أهم المفاهيم المرتبطة بهذا الأسلوب، كذلك أهم مشاكل البرمجة غير الخطية ذات الحدود الموجبة التي يتناولها أسلوب البرمجة الهندسية وطرق حلها مع إعطاء بعض من الأمثلة التوضيحية.

(١٠-٢) بعض التعريفات Some Definitions

في هذا الفصل سوف نقدم بعض أهم التعريفات والتي سوف نستخدمها في الفصول التالية لحل مشاكل البرمجة الهندسية.

تعريف (١٠-١): يقال أن الدالة $P(x)$ دالة ذات حدود موجبة **Posynomial Function** إذا كان:

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{t=1}^{T} P_t(x) \\ &= \sum_{t=1}^{T} C_t X_1^{a_{t1}} X_2^{a_{t2}} \ldots X_N^{a_{tN}} \\ &= \sum_{t=1}^{T} C_t \prod_{j=1}^{N} X_j^{a_{tj}} \qquad (10.1) \end{aligned}$$

$$X_j, C_t > 0 \quad , \; j = 1,2,..,N \; , \; t = 1,2,..,T$$

a_{tj} قيم حقيقية

حيث تسمى $P_t(x)$ بالحد الواحد **Single-Term** أو **Monmial**. أما إذا كانت C_t تأخذ قيم بعضها موجب وبعضها سالب أو بعبارة أخرى غير مقيدة بالإشارة الموجبة في هذه الحالة تسمى الدالة $P(x)$ بالدالة العامة **Signomial Function** أو **Generalized Function**.

تعريف (١٠-٢): يقال أن نموذج البرمجة غير الخطية التالي:

$$\text{Optimize } Z = g_0(X) \tag{10.2}$$

$$\text{S.T.} \quad g_i(X) \le 1 \quad , i = 1,2,\ldots,M \tag{10.3}$$

$$X_j > 0 \quad , j = 1,2,\ldots,N \tag{10.4}$$

حيث:

$$g_i(x) = \sum_{t=1}^{T_i} P_{it}(x)$$

$$= \sum_{t=1}^{T_i} C_{it} \prod_{j=1}^{N} X_j^{a_{itj}} \tag{10.5}$$

$$C_{it} > 0 \quad , i = 1,2,..,M$$

أي دالة الهدف وجميع الدوال في الطرف الأيسر للقيود ذات حدود موجبة.

فأنه يقال أن النموذج (10.4)-(10.2) بنموذج البرمجة الهندسي العادي Regular Geometric Prog. Model [19].

ملحوظة : ١- إذا فرضنا أن $Z_j = LnX_j$ فأنه يمكن تحويل النموذج العادي أعلاه إلى أخر محدب مكافئ لـه An Equivalent Convex Model.

٢- ويسمى النموذج (10.4)-(10.2) بالمشكلة الأصلية Primal Problem.

<u>تعريف (١٠-٣)</u> : يناظر كل مشكلة أصلية في (10.4)-(10.2) مشكلة أخرى ذات قيود خطية تسمى المشكلة الثنائية Dual Geometric Prog. Problem وتأخذ المشكلة الثنائية الشكل التالي:

$$\text{Optimize } d(W)=\prod_{i=0}^{M}\prod_{t=1}^{T_i}\left[\frac{C_{it}W_{i0}}{W_{it}}\right]^{W_{it}} \tag{10.6}$$

$$\text{S.T.} \quad \sum_{t=1}^{T_0} W_{0t}=1 \tag{10.7}$$

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{T_i} W_{it}a_{itj}=0 \quad , \; j=1,2,\ldots,N \tag{10.8}$$

حيث:

$$W_{i0}=\sum_{t=1}^{T_i} W_{it}$$

ويسمى القيد (10.7) بالشرط الطبيعي Normality Condition وتسمى القيود في (10.8) بشروط التعامد Orthogonally Conditions.

ملحوظة: المتغيرات W_{it} ، حيث $t=1,2,..,T_i$, $i=0,1,2,\ldots,M$ تشير إلى المتغيرات الثنائية.

وفي الفصل التالي سوف نثبت أن الحل الأمثل للمشكلة الثنائية يكافئ الحل الأمثل للمشكلة الأصلية.

تعريف (١٠-٤): إذا فرضنا أن $V_1, V_2, \ldots, V_t$ مقادير موجبة، كذلك إذا اعتبرنا أن $W_1, W_2, \ldots, W_t$ أوزان ترجيحية لـ V بحيث:

$$W_1+W_2+\ldots+W_t=1 \tag{10.9}$$

بالتالي فإن الوسط الحسابي المرجح لـ V_t يصبح على النحو:

$$V_1W_1 + V_2W_2 + ... + V_tW_t = \sum_{t=1} V_tW_t$$

كذلك نجد أن المتوسط الهندسي المرجح لـ V_t يصبح:

$$\left(V_1^{W_1}.V_2^{W_2}...V_t^{W_t}\right)^{1/\sum_t W_t} = V_1^{W_1}.V_2^{W_2}...V_t^{W_t} \qquad (10.11)$$
$$= \prod_{t=1}^{T_0} V_t^{W_t}$$

حيث: $0 \le W_t \le 1$ ، $\sum W_t = 1$

وبما أن العلاقة بين الوسط الحسابي المرجح والوسط الهندسي المرجح على النحو التالي:

$$V_1W_1 + V_2W_2 + ... + V_tW_t \ge V_1^{W_1}.V_2^{W_2}...V_t^{W_t}$$

أي:

$$\sum_{t=1}^{T_0} V_tW_t \ge \prod_{t=1}^{T_0} V_t^{W_t} \quad , \sum W_t = 1 \ , \ 0 \le W_t \le 1 \qquad (10.12)$$

وتسمى العلاقة بين المتوسط الحسابي والوسط الهندسي في (10.12) بالمتباينة العددية الهندسية العامة **Generalized arithmetic Geometric Inequality**.

ملحوظة: ١- العلاقة بين الحل الأمثل للمشكلة الأصلية والثنائية يعتمد على المتباينة العددية الهندسية العامة في (10.12).

٢- تمثل الأوزان الترجيحية W_t المتغيرات الثنائية في المشكلة الثنائية.

تعريف (١٠-٥): يسمى الفرق بين عدد الحدود في النموذج العـادي للبرمجـة الهندسية وعدد المتغيرات القرارية (n) مضاف إليهـا واحـد بدرجـة الـصعوبة Degree of Difficulty للنموذج (10.4)-(10.2) ونرمز لهـا بـالرمز (dd) وبالتالي فإن:

$$dd = T - (n+1) \qquad (10.13)$$

حيث: $T = \sum_{i=0}^{M} t_i$

ملحوظة: عندما $dd = 0$ فإنه يتم الحصول على الحل الأمثل المطلـق Global Optimum Solution للمشكلة الثنائية وأيضاً الأصلية. ولكن عندما $(dd) > 1$ ففي هذه الحالة يمكن الحصول على حلـول مثلـى نـسبية Local Optimum Solution (نظراً لوجود أكثر من قيمة للمتغيرات الثنائية كما سوف نوضح ذلك في الأمثلة التالية).

تعريف (١٠-٦): يقال أن القيد $g(X) \le 0$ حرج Tight عند النقطـة X^* إذا تحقق في شكل متساوية عند النقطة X^* أي عندما $g(X^*) = 0$، كذلك يقـال أن القيد $g(X) \le 0$ غير حرج Loose عند النقطة X^* إذا تحقق في شكل متباينـة عند النقطة X^* أي عندما $g(X^*) < 0$.

تعريف (١٠-٧): يقال أن نموذج البرمجة الهندسية التالي:

$$\text{Min.} \quad g_0(X) \tag{10.14}$$
$$\text{S.T.} \quad g_i(X) \le \sigma_i \quad , \ i = 1,2,\dots,M \tag{10.15}$$
$$X_j > 0 \quad , \ j = 1,2,\dots,N \tag{10.16}$$

حيث:

$$g_i(x) = \sum_{t=1}^{T_i} \sigma_{it} C_{it} \prod_{j=1}^{N} X_j^{a_{itj}} \quad , \ i = 1,2,..,M \tag{10.17}$$
$$\sigma_{it} = \pm 1 \ , \quad C_{it} > 0 \tag{10.18}$$

نموذج برمجة هندسية عام Generalized (Signomial) Geometric Model ونرمز له بالرمز (GGP) ويلاحظ أن نموذج البرمجة الهندسية العادي هو حالة خاصة من نموذج البرمجة الهندسية العام عندما $\sigma_{it} = \pm 1$ لجميع قيم i ، t.

ويمكن إعادة كتابة النموذج (GGP) في (10.16)-(10.14) على النحو التالي:

$$\text{Min.} \quad P_0(X) - Q_0(X) \tag{10.19}$$
$$\text{S.T.} \quad P_i(X) - Q_i(X) \le 1 \quad , \ i = 1,2,\dots,M \tag{10.20}$$
$$X_j > 0 \quad , \ j = 1,2,\dots,N$$

حيث كل من $P_i(X), Q_i(X)$ ، بحيث $i = 0,1,2,..,M$ دوال ذات حدود موجبة وعادة يسمى النموذج GGP بالمشكلة الأصلية Primal Problem.

<u>تعريف (١٠-٨)</u>: يناظر النموذج GGP نموذج يسمى نموذج هندسي شبة ثنائي Quasidual Geometric Model ويأخذ الشكل التالي:

$$\text{Max. } d = \sigma_0 \left\{ \prod_{i=0}^{M} \prod_{t=1}^{T_i} \left[\frac{C_{it} W_{i0}}{W_{it}} \right]^{\sigma_{it} W_{it}} \right\}^{\sigma_0} \qquad (10.21)$$

$$\text{S.T.} \quad \sum_{t=1}^{T_0} \sigma_{0t} W_{0t} = \sigma_0 \qquad (10.22)$$

$$\sum_{i=1}^{M} \sum_{t=1}^{T_i} \sigma_{it} W_{it} a_{itj} = 0 \qquad j = 1,2,\ldots,N \qquad (10.23)$$

$$W_{i0} = \sigma_i \sum_{t=1}^{T_i} \sigma_{it} W_{it} \geq 0 \qquad i = 0,1,2,..,M \qquad (10.24)$$

$$W_{it} \geq 0 \qquad i = 0,1,2,..,M \;, t = 1,2,..,T_i \qquad (10.25)$$

وفي هذا الباب سوف تقتصر دراستنا على النموذج غير المقيدة والمقيدة ذات الحدود الموجبة فقط.

(١٠-٣) مشاكل البرمجة الهندسية غير المقيدة ذات الحدود الموجبة

Unconstrained Posynomial GP Problems

تأخذ مشاكل البرمجة الهندسية غير المقيدة ذات الحدود الموجبة شكل النموذج الهندسي العادي المعرف في تعريف (١٠-٢) حيث:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Min.}Y=\sum_{t=1}^{T_0}C_t\prod_{j=1}^{N}X_j^{a_{tj}} \\ &C_t>0\,,X_j>0 \quad , \ j=1,2,..,N \end{aligned}\right\} \qquad (10.26)$$

وكما ذكرنا سابقاً في الباب السابق أنه لإيجاد الحل الأمثل للنموذج (10.26) نوجد معادلات الاستقرار وبحلها نحصل على القيم المثلى لـ X_j حيث معادلات الاستقرار على النحو:

$$\frac{\partial Y}{\partial X_j}=\sum_{t=1}^{T_0}C_t\,a_{tj}\,X_j^{a_{tj}-1}\prod_{i\neq j}^{N}X_j^{a_{tj}}=0 \qquad (10.27)$$

وبما أن $X_j>0$ بالتالي بضرب طرفي المعادلة (10.27) في X_j نحصل على المعادلات التالية:

$$\sum_{t=1}^{T_0}C_t\,a_{tj}\prod_{j=1}^{N}X_j^{a_{tj}}=0 \quad , \ j=1,2,..,N \qquad (10.28)$$

وبحل مجموعة المعادلات غير الخطية (10.28) آنياً للحصول على نقط الاستقرار X^* ثم حساب Y^* يكون صعب في كثير من الحالات. لذا أستخدم عالم الرياضيات Duffin العلاقة بين المشكلة الأصلية والمشكلة الثنائية للحصول على الحل الأمثل للمشكلة الأصلية. فعرف المتغيرات الثنائية W_t بحيث تشير W_t إلى مساهمة الحد رقم t في القيمة المثلى لدالة الهدف، أي:

$$W_t = \frac{C_t P_t(X^*)}{Y^*} \qquad , \ t = 1,2,\ldots,T_0$$

$$\longrightarrow$$

$$W_t Y^* = C_t P_t(X^*) \tag{10.29}$$

$$0 \le W_t \le 1 \ , \ \sum_{t=1}^{T_0} W_t = 1$$

وبالتالي يكون المطلوب إيجاد قيم W_t عند القيمة المثلى لدالة الهدف Y^* ثم الحصول على Z^* ثم تحديد القيم المثلى X_j^*. ويتم ذلك على النحو التالي:

$$\text{Min.}Y = \sum_{t=1}^{T_0} W_t \left[\frac{C_t \prod_{j=1}^{N} X_j^{a_{tj}}}{W_t} \right] \tag{10.30}$$

وتصبح المشكلة الثنائية المناظرة لها على النحو:

$$\text{Max.}Z = \prod_{t=1}^{T_0} \left[\frac{C_t \prod_{j=1}^{N} X_j^{a_{tj}}}{W_t} \right]^{W_t}$$

$$= \prod_{t=1}^{T_0} \left[\frac{C_t}{W_t} \right]^{W_t} \prod_{t=1}^{T_0} \left[\prod_{j=1}^{N} X_j^{a_{tj}} \right]^{W_t}$$

$$= \prod_{t=1}^{T_0} \left[\frac{C_t}{W_t} \right]^{W_t} \left\{ \prod_{j=1}^{N} X_j^{\sum_{t=1}^{T_0} a_{tj} W_j} \right\} \tag{10.31}$$

وحيث أن مجموع معادلات الاستقرار (10.28) للدالة (10.26) يمكن إعادة كتابتها كدالة في W_t وذلك بالتعويض بقيمة W_t في المعادلة (10.29) فتصبح على النحو التالي:

$$\sum_{t=1}^{T_0} a_{ty} W_t Y^* = 0 \qquad , \; j=1,2,\ldots,N \qquad (10.32)$$

$$\longrightarrow$$

$$\sum_{t=1}^{T_0} W_t = 1 \qquad (10.33)$$

ونلاحظ أن المعادلات (10.20),(10.19) معادلات خطية في W_t^* بحلها يمكن الحصول على W_t, Y^*.

وبما أن:

$$Y^* = Z^* = \prod_{t=1}^{T_0}\left[\frac{C_t}{W_t}\right]^{W_t^*}\left\{\prod_{j=1}^{N} X_j^{\sum_{t=1}^{T_0} a_{tj} W_j^*}\right\} \qquad (10.34)$$

$$= \prod_{t=1}^{T_0}\left[\frac{C_t}{W_t^*}\right]^{W_t} \qquad (10.35)$$

ملحوظة: في المعادلات (10.19) إذا تم قسمة الطرفية على Y^* (حيث Y^* قيمة موجبة) فنجد ان:

$$\sum_{t=1}^{T_0} a_{ty} W_t^* = 0 \qquad (10.36)$$

وبالتالي فإن:

$$\left\{\prod_{j=1}^{N} X_j^{\sum_{t=1}^{T_0} a_{tj} W_j}\right\} = 1 \qquad (10.37)$$

ومما سبق يمكن تلخيص خطوات حل نموذج (10.13) في الخطوات التالية:

١- تكوين المعادلات (10.22),(10.20) حيث تمثل معادلات خطية في W_t. وبحلها نحصل على قيم W_t^*.

٢- حساب قيمة Y^* من المعادلة (10.35).

٣- بالتعويض في المعادلات (10.16) نحصل على X^*.

وسوف نوضح ذلك من خلال الخطوات التالية.

مثال (١٠-١): اعتبر النموذج البرمجة الهندسية التالي [19]:

$$\text{Min.} Y = 60\,X_1^{-3}\,X_2^{-2} + 50\,X_1^{3}\,X_2 + 20\,X_1^{-3}\,X_2^{3}$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل: ١- نكون المعادلات (10.36),(10.34) على النحو التالي:

$$\left.\begin{aligned} W_1 + W_2 + W_3 &= 1 \\ -3W_1 + 3W_2 - 3W_3 &= 0 \\ -2W_1 + W_2 + 3W_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

وبحل المعادلات (1) نحصل على قيم W_t^* على النحو التالي:

$$W_1^* = 0.4 \;,\; W_2^* = 0.5 \;,\; W_3^* = 0.1$$

٢- نحسب Y^* من المعادلة (10.35) على النحو التالي:

$$Y^* = \left[\frac{60}{0.4}\right]^{0.4}\left[\frac{50}{0.5}\right]^{0.5}\left[\frac{20}{0.1}\right]^{0.1} = 125.8$$

٣- بالتعويض في (10.29) نجد أن:

$$60\,X_1^{-3}\,X_2^{-2} = 0.4(125.8) = 50.32 \qquad (2)$$

كذلك:

$$50\,X_1^{3}\,X_2 = 0.5(125.8) = 1.258 \qquad (3)$$

وبأخذ ln لطرفي المعادلتين (3),(2)

$$-3\ln X_1 - 2\ln X_2 = \ln 0.838667 = -0.17594195 \qquad (4)$$

$$3\ln X_1 + \ln X_2 = \ln 1.258 = 0.2295232 \qquad (5)$$

وبافتراض أن $Z_1 = \ln X_1 \;,\; Z_2 = \ln X_2$ تصبح المعادلتين (5),(4) على النحو التالي:

$$-3Z_1 - 2Z_2 = -0.17594195 \qquad (6)$$

$$3Z_1 + Z_2 = 0.2295232 \qquad (7)$$

وبحل المعادلتين (7),(6) نجد أن:

$$-Z_2 = 0.0535813 \longrightarrow X_2^* = e^{-0.0535813} = 0.94$$

$$Z_1 = 0.0947015 \longrightarrow X_1^* = e^{0.0947015} = 1.1$$

ملحوظة: في هذا المثال نجد أن درجة الصعوبة (dd) تساوي صفر حيث:

$$dd = T - (n+1)$$
$$= 3 - (2+1) = 0$$

مثال (٩-٢): اعتبر النموذج التالي

$$\text{Min.}Y = 40\,X_1^{-1}\,X_2^{-1}\,X_3^{-1} + 20\,X_1\,X_2 + 10\,X_1\,X_3 + 40\,X_1\,X_3 + 5\,X_1$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

الحل: بافتراض أن المتغيرات الثنائية W_1, W_2, W_3, W_4, W_5 وبإيجاد الشرط الطبيعي وشروط التعامد نجد أن:

$$\left.\begin{aligned} W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 &= 1 \\ -W_1 + W_2 + W_3 + 0 + W_5 &= 0 \\ -W_1 + W_2 + 0 + W_4 + 0 &= 0 \\ -W_1 + 0 + W_3 + W_4 + 0 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ونلاحظ أن عدد المعادلات (1) أقل من عدد المتغيرات وبالتالي لا يوجد حل وحيد لها أي يوجد عدد لا نهائي من الحلول الممكنة ويمكن الحصول على W_1, W_2, W_3, W_4 بدلالة W_5 على النحو التالي:

$$\left.\begin{aligned} W_1 &= \frac{2}{5} - \frac{1}{5}W_5 \quad , \quad W_2 = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}W_5 \\ W_3 &= \frac{1}{5} - \frac{3}{5}W_5 \quad , \quad W_4 = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}W_5 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

وبالتالي اختيار أي قيمة لـ W_5، بحيث $0 \leq W_5 \leq 1$ والتعويض في (2) يتم الحصول على قيم W_1, W_2, W_3, W_4 التي تحقق الشرط الطبيعي وشروط التعامد، وتصبح المشكلة اختيار القيم المثلى لـ W_1, W_2, W_3, W_4, W_5 من بين عدد لا نهائي من الحلول الممكنة.

(١٠ - ٤) مشاكل البرمجة الهندسية المقيدة ذات الحدود الموجبة
Constrained Posynomial GP Problems

إذا اعتبرنا مشكلة البرمجة الهندسية المقيدة ذات الحدود الموجبة Posynomial Terms على النحو التالي [20]:

$$\text{Min. } Y = \sum_{t=1}^{T_0} C_{0t} P_t(x) = \sum_{t=1}^{T_0} C_{0t} \prod_{j=1}^{N} X_j^{a_{0tj}} \qquad (10.38)$$

$$\text{S.T.} \quad \sum_{t=1}^{T_i} C_{it} \prod_{j=1}^{N} X_j^{a_{itj}} \le 1 \qquad i = 1,2,\ldots,M \qquad (10.39)$$

$$C_{it} > 0 \,,\, X_j > 0 \;,\; j = 1,2,..,N \;,\; t = 1,2,..,T_i \qquad (10.40)$$

وباستخدام المتباينة العددية الهندسية العامة وتحويل المشكلة المقيدة إلى مشكلة غير مقيدة [20,19]، فيمكن أثبات أن المشكلة الثنائية المناظرة للمشكلة (10.38)-(10.40) على النحو التالي:

$$\text{Max. } d(W) = \prod_{i=0}^{M} \prod_{t=1}^{T_i} \left[\frac{C_{it} W_{i0}}{W_{it}} \right]^{W_{it}} \qquad (10.41)$$

$$\text{S.T.} \quad \sum_{t=1}^{T_0} W_{0t} = 1 \qquad (10.42)$$

$$\sum_{i=1}^{M} \sum_{t=1}^{T_i} a_{itj} W_{it} = 0 \qquad j = 1,2,\ldots,N \qquad (10.43)$$

$$W_{i0} = \sum_{t=1}^{T_i} W_{it} \qquad i = 1,2,\ldots,M \qquad (10.44)$$

حيث تشير W_{it} إلى المتغيرات الثنائية، ويمثل القيد (10.42) الشرط الطبيعي Normality Condition وتمثل القيود (10.43) شروط التعامد Orthogonally Conditions. كذلك $W_{00} = 1$ حيث $W_{00} = W_{01} + W_{02}$.

وبحل المعادلات (10.43),(10.44) يتم الحصول على قيم المتغيرات الثنائية W_{it} وبالتعويض في (10.41) يتم الحصول على $d^*(W)$ وبالتالي $Y(X^*)$ ثم على القيمة المثلى للمشكلة الأصلية $Y(X^*)$ كذلك ويمكن الحصول على X_j^* من العلاقتين التاليتين:

$$W_{0t}^*[Y(X^*)] = C_{0t}\prod_{j=1}^{N} X_j^{a_{0tj}} \qquad , \quad t = 1,2,\dots,T_0 \qquad (10.45)$$

كذلك:

$$\frac{W_{it}}{\sum_{t=1}^{T_i} W_{it}} = C_{it}\prod_{j=1}^{N} X_j^{a_{itj}} \quad , \; i = 1,2,\dots,M \; , \; j = 1,2,\dots,N \qquad (10.46)$$

<u>مثال (٩-٣)</u>: اعتبر نموذج البرمجة الهندسية التالي [20]:

$$\text{Min.}Y = 0.3\, X_1\, X_3^{1.2} + 0.5\, X_1^{-1.5}\, X_2^{0.2}\, X_3^{-1.4} \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \qquad 0.8\, X_1\, X_3 \le 1 \qquad (2)$$

$$1.2\, X_1\, X_2^{-1} \le 1 \qquad (3)$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0 \qquad (4)$$

المطلوب: ١- أوجد المشكلة الثنائية المناظرة لـ (4)-(1).

٢- أوجد الحل الأمثل للمشكلة الثنائية.

٣- من (٢) أوجد الحل الأمثل للمشكلة الأصلية.

الحل: إذا فرضنا أن المتغيرات الثنائية W_{01}, W_{02} تشير إلى الحد الأول والثاني في دالة الهدف كذلك W_{11} تشير إلى الحد الأول في القيد (2)، W_{21} تشير إلى الحد الأول في القيد (3).

ملاحظة: ١- بما أن القيد (2) يحتوي على حد واحد فقط بالتالي فإن $W_{10} = W_{11}$ بالمثل القيد (3) $W_{20} = W_{21}$، وأيضاً $W_{00} = 1$.

٢- درجة الصعوبة $dd = 0$ وبالتالي عدد المعادلات الخطية سوف يساوي عدد المتغيرات الثنائية.

وتصبح المشكلة الثنائية على النحو التالي:

$$\text{Max. } d(W) = \left[\frac{0.3}{W_{01}}\right]^{W_{01}} \left[\frac{0.5}{W_{02}}\right]^{W_{01}} [0.8]^{W_{11}} [1.2]^{W_{21}} \qquad (5)$$

$$\text{S.T.} \quad \left.\begin{aligned} & W_{01} + W_{02} = 1 \\ & W_{01} - 1.5W_{02} + W_{11} + W_{21} = 0 \\ & 0 + 0.2W_{02} + 0 - W_{21} = 0 \\ & 1.2W_{01} - 1.4W_{02} + W_{11} + 0 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

وبحل المعادلات الخطية (5) نحصل على قيم W^* المثلى على النحو التالي:

$$d^* = 0.7253 \quad , \quad W_{01}^* = 0.334 \;\; , \;\; W_{02}^* = 0.666 \;\; ,$$
$$W_{11}^* = 0.5318 \quad , \quad W_{21}^* = 0.1332$$

٣- وبالتالي فإن:

$$Y(X^*) = 0.7253$$

ومن العلاقتين (10.46),(10.45) يمكن حساب X_j^* على النحو التالي:

$$W_{01}^*[Y(X^*)] = 0.3\,X_1\,X_3^{1.2} \longrightarrow 0.2423 = 0.3\,X_1\,X_3^{1.2} \qquad (7)$$

$$W_{02}^*[Y(X^*)] = 0.5\,X_1^{-1.5}\,X_2^{0.2}\,X_3^{-1.4} \longrightarrow 0.4830 = 0.5\,X_1^{-1.5}\,X_2^{0.2}\,X_3^{-1.4} \qquad (8)$$

$$\frac{W_{11}^*}{\sum_{t=1}^{T_1} W_{1t}^*} = 1 = 0.8\,X_1\,X_3 \qquad (9)$$

$$X_1 = 1.25\,X_3^{-1} \qquad (10)$$

$$\frac{W_{21}^*}{\sum_{t=1}^{T_2} W_{2t}^*} = 1 = 1.2\,X_1\,X_2^{-1} \qquad (11)$$

بالتعويض بــ (11) في (7) نجد أن $X_3^* = 1.0929$ وبالتالي فإن $X_1^* = 1.1437$

كذلك من (11) نجد أن $X_2^{-1} = \frac{1}{1.2\,X_1} = 0.72863$ بالتالي $X_2^* = 1.37244$

<u>مثال (٩-٤)</u>: اعتبر نموذج البرمجة الهندسية التالي

$$\text{Min.}Y = 0.3\,X_1\,X_3^{1.2} + 0.5\,X_1^{-1.5}\,X_2^{-1}\,X_3^{-1.4} + 0.2\,X_2^{1.3} \qquad (1)$$

$$\text{S.T.} \quad 0.8\,X_1\,X_3 \le 1 \qquad (2)$$

$$1.2\,X_1\,X_2^{-1} \le 1 \qquad (3)$$

$$X_1, X_2, X_3 \ge 0 \qquad (4)$$

المطلوب: ١- حدد درجة الصعوبة (dd) للنموذج.

٢- أوجد النموذج الثنائي المناظر له.

٣- أوجد حل النموذج الثنائي ثم أوجد حل النموذج الأصلي.

الحل: ١- بما أن درجة الصعوبة dd حيث:

$$dd = \sum_{i=0}^{2} T_i - (n+1) = 5 - (3+1) = 1 \neq 0$$

وبالتالي يكون عدد المتغيرات الثنائية أكبر من عدد المعادلات الخطية.

٢- النموذج الثنائي المناظر للنموذج (4)-(1) على النحو التالي:

$$\text{Max. } d(W) = \left[\frac{0.3}{W_{01}}\right]^{W_{01}} \left[\frac{0.5}{W_{02}}\right]^{W_{01}} [0.8]^{W_{11}} [1.2]^{W_{21}} \qquad (5)$$

$$\text{S.T.} \quad W_{01} + W_{02} + W_{03} = 1 \qquad (6)$$

$$W_{01} - 1.5W_{02} + 0 + W_{11} + W_{21} = 0 \qquad (7)$$

$$0 - 1.2W_{02} + 1.3W_{03} + 0 - W_{21} = 0 \qquad (8)$$

$$1.2W_{01} - 1.4W_{02} + 0 + W_{11} + 0 = 0 \qquad (9)$$

ونلاحظ أن النموذج (9)-(5) دالة الهدف غير الخطية ولكن القيود (9)-(6) قيود خطية. وبما أن القيود (9)-(6) عبارة عن 4 معادلات في 5 مجاهيل (حيث أن درجة الصعوبة تساوي 1). فإنه يمكن إيجاد قيم كل من $W_{02}, W_{03}, W_{11}, W_{21}$ بدلالة W_{01} والتعويض في دالة الهدف (5) ثم تفاضلها ومساواة التفاضل بالصفر وبحل المعادلة نحصل على قيمة W_{01}^* حيث

$W_{01}^* = 0.3339$ وبالتعويض في المعادلات (9)-(5) نحصل على باقي القيم على النحو التالي:

$$W_{02}^* = 0.3074 \quad , \quad W_{03}^* = 0.3587 \quad , \quad W_{11}^* = 0.0297 \quad ,$$
$$W_{12}^* = 0.0975 \quad , \quad d^* = Y^* = 0.9189$$

وبالتعويض في المعادلتين (10.46),(10.45) نجد أن:

$$X_1^* = 1.223 \quad , \quad X_2^* = 1.468 \quad , \quad X_3^* = 0.8610$$

Exercises (١٠-٥) تمرينات

(١٠-١): أوجد الحل الأمثل للمشاكل غير المقيدة التالية مع تحديد درجة الصعوبة (dd).

1) $\text{Min.}Y = 7X_1X_2^{-1} + 2X_2X_3^{-2} + 5X_1^{-3}X_2X_3 + X_1X_2X_3$

$X_1, X_2, X_3 > 0$

2) $\text{Min.}Z = 5X_1X_2^{-1} + 2X_1^{-1}X_2 + 5X_1 + X_2^{-1}$

$X_1, X_2 \geq 0$

3) $\text{Min.}Y = 2X_1^{-2}X_2^{-3} + 8X_1^{-3}X_2 + 3X_1X_2$

$X_1, X_2 \geq 0$

4) $\text{Min.}Z = 2X_1 + 4X_2 + 10X_1^{-1}X_2^{-1}$

$X_1, X_2 > 0$

(١٠-٢): أوجد الحل المثل للمشاكل المقيدة التالية مع تحديد درجة الصعوبة (dd)

1) $\text{Min.}H = 2X_1X_2^2X_3^{-1} + 4X_1^{-1}X_2^{-1} + 5X_1X_3$

S.T. $X_1^{-1}X_2^{-1} \leq 5$

$X_1, X_2, X_3 > 0$

2) $\text{Min.}Z = -8X_1^2X_3 + 10X_2^{-1}X_3^2$

S.T. $-2X_2^{-2}X_3^{-1} + 3X_1^{-1}X_2^{-1} \leq 1$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

3) $\text{Min.}Y = 2X_1X_2^{-3} + 4X_1^{-1}X_2^{-1} + 10.6X_1X_3$

S.T. $10X_1^{-1}X_2^2 < 1$

$X_1, X_2 > 0$

ملحق رقم (A): المصفوفات Matrices

<u>تعريف (1.A)</u> المصفوفة هي منظوم مستطيل للعناصر A Rectangular Array of Elements [39,41].

فإذا كانت A مصفوفة مكونة من m من الصفوف، n من الأعمدة فيمكن كتابتها على النحو:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (A.1)$$

حيث يشير a_{ij} إلى العنصر في الصف (i)، وفي العمود (j) كذلك يمكن كتابة المصفوفة على النحو:

$$A = \left[a_{ij}\right]_{m \cdot n}$$

<u>حالة خاصة:</u> ١- إذا كانت المصفوفة مكونة من صف واحد على النحو:

$$B = \left[b_{11} \quad b_{12} \quad \cdots\cdots \quad b_{1n}\right]_{1 \cdot n}$$

أي من الترتيب $(1 \cdot n)$ في هذه الحالة تسمى المصفوفة B متجه صفي Row Vector أي مصفوفة مكونة من صف واحد، n عمود.

٢- إذا كانت المصفوفة مكونة من عمود واحد على النحو:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix}_{m \cdot 1}$$

أي من الترتيب $(m \cdot 1)$ في هذه الحالة تسمى المصفوفة C متجه عمودي Column Vector.

<u>أنواع المصفوفات:</u> ١- يقال للمصفوفة أنها مصفوفة مربعة Square Matrix، إذا كان عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة أو بعبارة أخرى $m = n$.

فمثلاً، المصفوفة A حيث:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 3 \\ 10 & 2 & 7 \\ 4 & 11 & 0 \end{bmatrix}_{3 \cdot 3}$$

تمثل مصفوفة مربعة من الترتيب $(3 \cdot 3)$.

٢- يقال أن المصفوفة I مصفوفة الوحدة Identity Matrix إذا كانت المصفوفة مصفوفة مربعة بحيث تأخذ عناصرها القيم التالية:

$$\left.\begin{array}{ll} a_{ij} = 1 & , i = j \\ a_{ij} = 0 & , i \neq j \end{array}\right\} \qquad (A.2)$$

أي جميع عناصرها أصفار باستثناء العناصر الواقعة على قطر المصفوفة فقيمة كل منها تساوى واحد.

فمثلاً $I_{3 \cdot 3}$, $I_{4 \cdot 4}$ على النحو:

$$I_{3 \cdot 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \cdot 3}$$

$$I_{4\cdot4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\cdot4}$$

٣- إذا كانت المصفوفة $A_{m\cdot n}$ وتم إبدال الصفوف مكان الأعمدة والعكس صحيح فإننا نحصل على مصفوفة أخرى مشتقة من المصفوفة A تسمى مبدول المصفوفة Transpose of A ونشير لها بالرمز A^T حيث يكون ترتيب المصفوفة A^T على النحو $(n\cdot m)$.

فمثلاً، إذا كانت المصفوفة A على النحو التالي:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\cdot3} \longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}_{3\cdot2}$$

٤- المصفوفة الصفرية Zero Matrix ونشير لها بالرمز O، هي مصفوفة جميع عناصرها أصفر. فمثلاً:

$$O_{3\cdot3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\cdot3} \quad , \quad O_{4\cdot4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\cdot4}$$

٥- يقال أن المصفوفة $A_{m\cdot n}$ تساوى المصفوفة $B_{m\cdot n}$ إذا كان:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \ , \ j = 1, 2, ..., n$$

عمليات على المصفوفات: ١- إذا كانت $A_{m \cdot n}$ ، $B_{n \cdot m}$ بحيث:

$$A = \left[a_{ij}\right]_{m \cdot n} \qquad , \qquad B = \left[b_{ij}\right]_{m \cdot n}$$

فإن:

$$D = A + B \qquad , \qquad D = \left[d_{ij}\right]_{m \cdot n}$$

بحيث:

$$d_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad (A.3)$$

بالمثل إذا كانت:

$$D = A - B$$

فإن:

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \qquad (A.4)$$

٢- إذا كانت $A_{m \cdot n}$ من الترتيب $(m \cdot n)$ والمصفوفة $B_{n \cdot k}$ فإنه يمكن الحصول على المصفوفة $D_{m \cdot k}$ حيث:

$$D_{m \cdot k} = A_{m \cdot n} \, B_{n \cdot k}$$

حيث:

$$d_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \, b_{rj} \qquad \text{لجميع قيم } i,j \qquad (A.5)$$

مثال: اعتبر المصفوفتين A , B بحيث:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{2 \cdot 3} \qquad , \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 7 & -2 \\ 0 & 9 & 1 \end{bmatrix}_{3 \cdot 3}$$

فإن:

$$D_{2\cdot3} = A\,B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -1 & 7 & -2 \\ 0 & 9 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (7\times2+0\times-1+1\times0) & (7\times5+0\times7+1\times9) & (7\times3+0\times-2+1\times1) \\ (3\times2+4\times-1+5\times0) & (3\times5+4\times7+5\times9) & (3\times3+4\times-2+5\times1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 44 & 22 \\ 2 & 88 & 6 \end{bmatrix}_{2\cdot3}$$

في هذه الحالة لا يمكن إيجاد حاصل ضرب $B_{3\cdot3}\,A_{2\cdot3}$ حيث عدد أعمدة B لا تساوى عدد صفوف A. وبصفة عامة $A\,B \neq B\,A$.

كذلك يمكن أثبات أن:

$$I_{m\cdot m}\,A_{m\cdot n} = A_{m\cdot n}\,I_{n\cdot n} = A \qquad (A.6)$$

$$(A\,B)\,C = A\,(B\,C) \qquad (A.7)$$

$$C\,(A+B) = C\,A + C\,B \qquad (A.8)$$

$$(A+B)\,C = A\,C + B\,C \qquad (A.9)$$

إذا كان λ مقدار ثابت فإن:

$$\lambda\,A = [\,\lambda\,a_{ij}\,]_{m\cdot n} \qquad (A.10)$$

أي أن ضرب مقدار ثابت في مصفوفة فهذا يعنى ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في المقدار الثابت.

محدد المصفوفة المربعة Determinant of A square Matrix

لكل مصفوفة مربعة A بحيث عنصرها العام a_{ij}، $i = 1,2,..,n$ ، $j = 1,2,..,n$ توجد قيمة عددية مناظرة لهذه المصفوفة تسمى محدد المصفوفة ويرمز له بالرمز $|A|$ حيث:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ : & : & : & : \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (A.11)$$

وتقرأ "$|A|$" محدد المصفوفة A من الترتيب (n)، وبالتالي يمكن تعريف المحدد بأنه دالة نطاقها فئة المصفوفات المربعة والتي عناصر كل منها أعداد حقيقية ومداها (أي نطاقها المصاحب) هو فئة قيم المحددات المناظرة للمصفوفات المربعة وهي فئة الأعداد الحقيقية.

فإذا كانت المصفوفة $A_{2\cdot2}$ فإن قيمة المحدد $|A|$ على النحو:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21} \qquad (A.12)$$

كذلك إذا كانت المصفوفة $A_{3\cdot3}$ فإن قيمة المحدد $|A|$ على النحو:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\,(a_{22}\, a_{33} - a_{32}\, a_{23}) - a_{12}\,(a_{21}\, a_{33} - a_{31}\, a_{23}) + a_{13}\,(a_{21}\, a_{32} - a_{31}\, a_{22}) \qquad (A.13)$$

<u>ملحوظة</u>: إذا كان المحدد من ترتيب (3) أو أكثر فإنه يمكن إيجاد قيمة المحدد باستخدام طريقة المرافقات Cofactors Method [38].

<u>المصفوفة غير الشاذة</u> إذا كانت A مصفوفة مربعة بحيث:

$$|A| \neq 0 \qquad (A.14)$$

ففي هذه الحالة يقال أن المصفوفة A مصفوفة غير شاذة Nonsingular Matrix أما إذا كان:

$$|A| = 0 \qquad (A.15)$$

فإنه يقال أن المصفوفة A مصفوفة شاذة Singular Matrix.

فعلى سبيل المثال، إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

فإن:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3(4) - 2(6) = 0$$

بالتالي فإن المصفوفة A مصفوفة شاذة.

<u>معكوس المصفوفة</u> إذا كانت المصفوفتان B , A مصفوفات مربعة وغير شاذة بحيث:

$$A\,B = I \quad , \quad B\,A = I \qquad (A.16)$$

فإنه يقال أن المصفوفة B معكوس المصفوفة A ويمكــن الرمــز للمــصفوفة B بالرمز A^{-1} أي:

$$B = A^{-1}$$

كذلك فإن المصفوفة A معكوس للمصفوفة B ويمكن الرمز لها بالرمز B^{-1} أي:

$$A = B^{-1}$$

<u>نظرية</u>: إذا كان $A\,B = I$ فإن المصفوفة A مصفوفة غير شاذة، أي $B = A^{-1}$، فإن المصفوفة A مصفوفة وحيدة Unique Matrix [الإثبات أنظر].

ويمكن حساب معكوس المصفوفة A على النحو التالي:

١- إيجاد محدد المصفوفة A فإذا كان $|A| \neq 0$ ننتقل للخطوة التالية.

٢- نوجد مصفوفة المرافقات M حيث:

$$M = [m_{ij}]_{m \cdot m} \qquad (A.17)$$

حيث:

$$m_{ij} = (-1)^{i+j}\, c_{ij} \qquad (A.18)$$

حيث c_{ij} هو قيمة المحدد المناظر للعنصر a_{ij} في المصفوفة A بعد حذف الصف i والعمود j، حيث يسمى c_{ij} بالمحيــدد Minor والمحيــدد c_{ij} تسبقه الإشارة $(-1)^{i+j}$ يسمى بالمرافق للعنصر a_{ij} Cofactor.

٣- نوجد مبدول المصفوفة M أي نوجد $M^{\backslash}$.

٤- نحسب A^{-1} من العلاقة:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} M^{\backslash} \qquad (A.19)$$

مثال: أوجد معكوس المصفوفة التالية:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

الحل: ١- نوجد المحدد $|A|$ على النحو:

$$|A| = 3(-24-1) - 2(-40+2) + 0(5+6)$$
$$= -75 + 76 + 0 = 1 \neq 0$$

٢- نحسب المصفوفة M على النحو التالي:

$$M=\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -25 & -38 & 11 \\ +16 & -24 & -7 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

٣- نوجد $M^{١}$ على النحو التالي:

$$M^{١}=\begin{bmatrix} -25 & +16 & 2 \\ -38 & -24 & -3 \\ 11 & -7 & -1 \end{bmatrix}$$

٤- نحسب A^{-1} كما يلي:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} M^{\backslash} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -25 & 16 & 2 \\ -38 & -24 & -3 \\ 11 & -7 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -25 & 16 & 2 \\ -38 & -24 & -3 \\ 11 & -7 & -1 \end{bmatrix}$$

وإثبات صحة النتيجة نثبت أن $A\,A^{-1} = I$ على النحو التالي:

$$A\,A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -25 & +16 & 2 \\ -38 & -24 & -3 \\ 11 & -7 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ملحق رقم (B): الصياغات التربيعية Quadratic Forms

إذا اعتبرنا الدالة $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ دالة في n من المتغيرات فإن الدالة $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ تسمى بالصياغة التربيعية Quadratic Form إذا كانت $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ بحيث:

$$F(X_1, X_2, ..., X_n) = Q(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij} X_i X_j = X^T Q X \qquad (B.1)$$

حيث:

$$X = [X_1, X_2, ..., X_n]^T \quad , \quad Q = [q_{ij}]_{n.n}$$

وغالباً تكون المصفوفة Q مصفوفة متماثلة Symmetric Matrix ولكن في حالة المصفوفة Q غير المتماثلة فإنه يمكن أحلال كل عنصر من العنصرين q_{ji}، q_{ij} ، $i \neq j$ بالقيمة $\left(\frac{q_{ij} + q_{ji}}{2}\right)$ ولم يحدث ذلك تغيير في $Q(X)$ [47] كما سوف نوضح في المثال التالي.

<u>مثال (١)</u>: إذا فرضنا أن

$$F(X_1, X_2, X_3) = [X_1, X_2, X_3]\begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$
$$= 5X_1^2 + 2X_2^2 + 3X_3^2 + 6X_1X_2 + 2X_1X_3 + 8X_2X_3 \qquad (1)$$

فنلاحظ أن المصفوفة Q مصفوفة غير متماثلة ولكن إذا تم استبدال أي عنصر q_{ij} أو q_{ji} بالقيمة $\left(\frac{q_{ij}+q_{ji}}{2}\right)$ نجد أن:

$$F(X_1, X_2, X_3) = [X_1, X_2, X_3]\begin{bmatrix}5 & 3 & 1\\ 3 & 2 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{bmatrix}$$

$$= 5X_1^2 + 2X_2^2 + 3X_3^2 + 6X_1X_2 + 2X_1X_3 + 8X_2X_3 \qquad (2)$$

فنجد أن الدالة رقم (1) تساوى الدالة رقم (2).

والصياغة التربيعية في (B.1) يقال أنها:-

١- تامة الإيجاب Positive Definite إذا كان [45,52]:

$$Q(X) > 0 \qquad \text{, for every } X \neq 0 \qquad (B.2)$$

٢- شبة تامة الإيجاب Positive-Semi Definite إذا كان:

$$Q(X) = 0 \qquad \text{, for every } X \neq 0 \qquad (B.3)$$

٣- تامة السلب Negative Definite إذا كان:

{−Q(X)} تامة الإيجاب (B.4)

٤- شبة تامة السلب Negative-Semi Definite إذا كان:

{−Q(X)} شبة تامة الإيجاب (B.5)

٥- غير معرفة indefinite إذا لم تكن في أي حالة من الحالات السابقة الأربعة.

وفيما يلي الشروط الضرورية والكافية Necessary and Sufficient Conditions لتحقق الحالات الخمسة أعلاه ما يلي:

١- تكون الصياغة التربيعية $Q(X)$ تامة الإيجاب (أو شبة تامة الإيجاب) إذا كانت قيم المحيددات الرئيسية The Principal Minor Determinants للمصفوفة Q جميعها موجبة (أو غير سالبة)[1] كذلك يقال أن المصفوفة Q تامة الإيجاب (أو شبة تامة الإيجاب).

٢- تكون الصياغة $Q(X)$ تامة السالبية، إذا كان قيمة المحيدد الرئيسي من الترتيب k لها الإشارة $(-1)^k$، $k = 1,2,...,n$ ، كذلك تسمى المصفوفة Q تامة السالبية.

٣- تكون الصياغة $Q(X)$ شبة تامة السالبية Negative-Semi Definite إذا كانت قيم المحيددات الرئيسية من الترتيب k للمصفوفة Q أم صفر أو بإشارة $(-1)^k$.

٤- غير ذلك تكون غير معرفة.

مثال (٢): حدد نوع كل مصفوفة من الصياغات المناظرة للمصفوفات التالية من حيث الإيجاب والسلب.

---

(1) المحدد الرئيسي من الترتيب k للمصفوفة $Q_{n.n}$ يعرف على النحو التالي:

$$\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1k} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{k1} & q_{k2} & \cdots & q_{kk} \end{vmatrix} \quad , \quad k = 1,2,...,n$$

$$1)\ Q_1=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&7&6\\3&0&2\end{bmatrix} \quad , \quad 2)\ Q_2=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}$$

$$3)\ Q_3=\begin{bmatrix}-2&1\\1&-3\end{bmatrix} \quad , \quad 4)\ Q_4=\begin{bmatrix}5&1&0\\-1&2&5\\4&1&1\end{bmatrix}$$

الحل:

$$1)\because Q_1=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&7&6\\3&0&2\end{bmatrix}_{3.3}$$

نحسب المحيددات الرئيسية على النحو التالي:

$$q_1=|1|=1>0 \quad , \quad q_2=\begin{vmatrix}1&0\\2&7\end{vmatrix}=7>0$$

$$q_3=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&7&6\\3&0&2\end{vmatrix}=-33$$

من قيم المحيددات الرئيسية q_1, q_2, q_3 نجد أن الصياغة X^TQ_1X غير معرفة بحيث $X\neq 0$.

$$2)\ \because Q_2=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}\longrightarrow$$

$$q_1=|2|=2>0 \quad , \quad q_2=\begin{vmatrix}2&-1\\-1&2\end{vmatrix}=3>0$$

من قيم المحيددات الرئيسية q_1 , q_2 نجد أن الصياغة Q_2 تامة الإيجاب بحيث $X \neq 0$.

$$3) \because Q_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$q_1 = |-2| = -2 < 0 \qquad , \qquad q_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 5 > 0$$

وبالتالي فإن الصياغة $X^T Q_3 X$ تامة السالبية بحيث $X \neq 0$.

$$4) \because Q_4 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$q_1 = |5| = 5 > 0 \qquad , \qquad q_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 11 > 0$$

$$q_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 > 0$$

وبالتالي فإن الصياغة $X^T Q_4 X$ تامة الإيجاب.

<u>تعريف (B-1)</u>: تسمى الدالة $F(X_1 , X_2 , ...,X_n)$ دالة محدبة Convex Function، بحيث إذا وإذا فقط تحققت العلاقة التالية عند النقطتين المختلفتين $X^{(1)},X^{(2)}$ ، $0 \leq \lambda \leq 1$:

$$F[\lambda X^{(1)} + (1-\lambda) X^{(2)}] \leq \lambda F(X^{(1)}) + (1-\lambda) F(X^{(2)}) \qquad (B.6)$$

فإذا تم استبدال ($\leq$) في العلاقة (B.6) بـــ ($<$) فإنــه يقــال أن الدالــة $F(X_1 , X_2 , ...,X_n)$ دالة شديدة التحدب Strictly Convex Function.

مثال (٣): حدد نوع كل دالة من الدوال التالية من حيث التحدب عند النقط المناظرة.

$$1)\ F(X) = 5\,X^2 \quad , \quad X^{(1)} = 7\,, X^{(2)} = 10\,, \lambda = 0.2$$

$$2)\ F(X_1, X_2) = 3\,X_1 + X_2 \quad , \quad X^{(1)} = (2,1)^T, X^{(2)} = (0,3)^T, \lambda = 0.2$$

الحل:

$$1) \because F[\lambda\, X^{(1)} + (1-\lambda)\, X^{(2)}] = F[0.2(7) + 0.8(10)]$$
$$= F(9.4) = 5(9.2)^2 = 423.2 \qquad (1)$$

$$\because \lambda\, F(X^{(1)}) + (1-\lambda)\, F(X^{(2)}) = 0.2[2(7)^2] + 0.8[5(10)^2]$$
$$= 0.2[2.45] + 0.8[500]$$
$$= 49.0 + 400.0 = 449 \qquad (2)$$

من (1) ، (2) يتضح أن:

$$F[\lambda\, X^{(1)} + (1-\lambda)\, X^{(2)}] < \lambda\, F(X^{(1)}) + (1-\lambda)\, F(X^{(2)})$$

وبالتالي فإن الدالة f(X) دالة شديدة التحدب.

$$2) \because F[\lambda\, X^{(1)} + (1-\lambda)\, X^{(2)}] = F\left(0.2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + 0.8\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}\right)$$
$$= F\left(\begin{bmatrix}0.4\\0.2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\2.4\end{bmatrix}\right) = F\left(\begin{bmatrix}0.4\\2.6\end{bmatrix}\right)$$
$$= 3(0.4) + 2.6 = 1.2 + 2.6 = 3.8 \qquad (3)$$

$$\because \lambda F(X^{(1)}) + (1-\lambda) F(X^{(2)}) = 0.2[3(2)+1] + 0.8[3(0)+3]$$
$$= 0.2[7] + 0.8[3]$$
$$= 1.4 + 2.4 = 3.8 \qquad (4)$$

من (3) ، (4) نجد أن:

$$F[\lambda X^{(1)} + (1-\lambda) X^{(2)}] = \lambda F(X^{(1)}) + (1-\lambda) F(X^{(2)})$$

وبالتالي فإن الدالة:

$$F(X_1, X_2) = 3X_1 + X_2$$

دالة محدبة.

تعريف (B-2): تسمى الدالة $F(X_1, X_2, ..., X_n)$ دالة مقعرة Concave Function إذا وإذا فقط كانت الدالة $(-F(X_1, X_2, ..., X_n))$ دالة محدبة.

مثال (٤): اعتبر الدالة $F(X_1, X_2)$ بحيث:

$$F(X_1, X_2) = 10 - X_1^2 - 5X_2^2$$

اختبر الدالة $F(X_1, X_2)$ من حيث التقعر عند النقطتين:

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 0.4$$

الحل: نوجد $(-F(X_1, X_2))$ حيث:

$$k(X_1, X_2) = -F(X_1, X_2) = -10 + X_1^2 + 5X_2^2$$

ثم نختبر تحدب الدالة $(-F(X_1, X_2))$ عند $X^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, X^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ على النحو التالي:

$$k\left(0.4\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+0.6\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right)=k\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.6\\1.2\end{bmatrix}\right)=k\left(\begin{bmatrix}0.6\\1.2\end{bmatrix}\right)$$

$$=-10+(0.6)^2+5(1.2)^2$$

$$=-10+0.36+7.20=-10+7.56$$

$$=-2.44 \qquad (1)$$

$$\lambda\,k(X^{(1)})+(1-\lambda)\,k(X^{(2)})=0.4[-10+0+0]+0.6[-10+1+20]$$

$$=0.4(-10)+0.6(11)=-4+6.6$$

$$=2.6 \qquad (2)$$

من (1) ، (2) نجد أن:

$$k[\lambda\,X^{(1)}+(1-\lambda)\,X^{(2)}]<\lambda\,k(X^{(1)})+(1-\lambda)\,k(X^{(2)})$$

وبالتالي فإن $(-F(X_1,X_2))$ دالة شديدة التحدب، بالتالي فإن الدالة $F(X_1,X_2)$ حيث:

$$F(X_1,X_2)=10-X_1^2-5\,X_2^2$$

دالة شديدة التقعر.

ملحق رقم (C): مقياس البعد (المسافة) Norm

في كثير من الأحيان يكون من الأهمية قياس المسافة أو البعدين بين نقطتين أو متجهين حقيقياً. فإذا كان Y , X متجهين حقيقياً ، فإن المسافة بينهما عبارة عن دالة Distance Function في Y , X يشار لها بالرمز $d(X,Y)$ كذلك يرمز لدالة المسافة Norm أو البعد بالرمز $\|X-Y\|$ [44].

<u>تعريف (C-١)</u>: تعرف الدالة $\|X-Y\|$ على النحو التالي:

$$\|X-Y\| = \sqrt{(X_1-Y_1)^2+(X_2-Y_2)^2+....+(X_n-Y_n)^2} \quad (C.1)$$

كذلك إذا كان X متجه فإن حجم المتجه Size of A Vector يقاس أيضاً بالدالة $\|X\|$ حيث:

$$\|X\| = \sqrt{X_{1\cdot n}X'_{n\cdot 1}} = \sqrt{X_1^2+X_2^2+.....+X_n^2} \quad (C.2)$$

مثال (١): إذا كان

$$X=[3 \quad 5 \quad 1] \qquad , \qquad Y=[7 \quad -1 \quad 0]$$

أوجد:

i) $\|X\|$, ii) $\|5X\|$

iii) $\|X-Y\|$, iv) $\|2X+3Y\|$

الحل:

$$\text{i) } \|X\| = \sqrt{XX'} = \sqrt{3^2+5^2+1^2}$$

$$= \sqrt{9+25+1} = \sqrt{35} = 5.92$$

$$ii)\ 5X = [15 \quad 25 \quad 5]$$

$$\|5X\| = \sqrt{(15)^2 + (25)^2 + (5)^2} = \sqrt{225 + 625 + 25}$$

$$= \sqrt{875} = 5\sqrt{35} = 5(5.92) = 29.6$$

$$iii)\ \|X - Y\| = \sqrt{(3-7)^2 + (5+1)^2 + (1-0)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 36 + 1} = \sqrt{53} = 7.28$$

$$iv)\ 2X + 3Y = [6 \quad 10 \quad 2] + [21 \quad -3 \quad 0]$$

$$= [27 \quad 7 \quad 2]$$

$$\|2X + 3Y\| = \sqrt{(27)^2 + (7)^2 + (2)^2} = \sqrt{729 + 49 + 4}$$

$$= \sqrt{782} = 27.96$$

ومما هو جدير بالذكر أن الدالة $\|X - Y\|$ تستخدم في كثير من النماذج للبرمجة الرياضية وتحويلاتها وبصفة خاصة في البرمجة العكسية Inverse Programming.

تعريف (C-٢): إذا كان المتجهين X , Y متجهين حقيقيين فإن:

1) $\|X\| \geq 0 \quad , \quad \|X\| = 0 \longleftrightarrow X = 0$

(تشير $\longleftrightarrow$ إلى عبارة إذا وإذا فقط).

2) $\|aX\| = |a|\ \|X\| \quad , \quad a \in R$

3) $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$

ملحق رقم (D): متسلسلة تيلور Taylor Series

تسمى المتسلسلة التالية [44,37]:

$$\sum_{k=0} a_k (x-c)^k = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + ... \qquad (D.1)$$

بمتسلسلة القوى في $(x-c)$ وتكون المتسلسلة تقاربية عندما $X \in (c-r, c+r)$ حيث r تمثل نصف قطر التقارب Radius Convergence. وتتقارب المتسلسلة من الدالة $f(x)$ تقارب مطلق عندما $X \in (c-r, c+r)$، وبالتالي فإنه في الفترة $(c-r, c+r)$ فإن:

$$f(x) = \sum_{k=0} a_k (x-c)^k = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + ... \qquad (D.2)$$

كذلك:

$$f'(x) = \sum_{k=1} a_k k (x-c)^{k-1} = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + ... \qquad (D.3)$$

$$f''(x) = \sum_{k=2} a_k k(k-1)(x-c)^{k-2}$$
$$= 2a_2 + 3\cdot 2a_3(x-c) + 4\cdot 3a_4(x-c)^2 + ... \qquad (D.4)$$

$$f'''(x) = \sum_{k=3} a_k k(k-1)(k-2)(x-c)^{k-3}$$
$$= 3\cdot 2a_3 + 4\cdot 3\cdot 2a_4(x-c) + 5\cdot 4\cdot 3a_5(x-c)^2 + .. \qquad (D.5)$$

وعندما $x = c$ فإن:

$$f(c) = a_0$$

$$f'(c) = 1 \cdot a_1$$

$$f''(c) = 2 \cdot 1 \cdot a_2 = 2!\, a_2$$

$$f'''(c) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_3 = 3!\, a_3$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(c) = k!\, a_k \qquad (D.6)$$

وبالتالي فإن:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!} \quad , \; k = 0,1,2,\ldots \qquad (D.7)$$

وبالتالي فإن الدالة $f(x)$ يمكن كتابتها على النحو التالي:

$$f(x) = \sum_{k=0} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k \qquad (D.8)$$

وتسمى المتسلسلة في (D.8) بمفكوك متسلسلة تيلور Taylor Series Expansion [٧]، نسبة إلى عالم الرياضيات Brook Taylor(١٦٨٥-١٧٣١) الذي قام باشتقاق الدالة $f(x)$ في الصياغة (D.8).

والحالة الخاصة من مفكوك تيلور عندما $c = 0$ قدمها عالم الرياضيات مكلورين Colin Maclaurin (١٦٩٨-١٧٤٦) فتصبح الدالة $f(x)$ على النحو:

$$f(x) = \sum_{k=0} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x)^k$$

$$= f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)\, x + \frac{1}{2!} f''(0)\, x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)\, x^3 + \dots \quad \text{(D.9)}$$

<u>مثال (١)</u> أوجد مفكوك تيلور للدالة:

$$f(x) = e^x$$

حول $x = 0$ أي عندما $c = 0$

بما أن:

$$f'(x) = e^x \;,\quad f''(x) = e^x \;,\dots,\quad f^{(k)}(x) = e^x$$

وبما أن مفكوك تيلور:

$$f(x) = \sum_{k=0} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

$$= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots\dots\dots\dots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$= \sum_{k=0} \frac{x^k}{k!}$$

ملحق رقم (E): استخدام حزمة TORA

حزمة TORA من الحزم المتخصصة في تطبيقات بحوث العمليات وتشير TORA إلى اختصار لعبـــارة Taha Operation Research Application [٨]. وتشتمل حزمة TORA على برامج لحل:

- المعادلات الخطية Linear Equation.
- نماذج البرمجة الخطية Linear Programming Models.
- نماذج النقل Transportation Models.
- نماذج البرمجة الصحيحة Integer Programming Models.
- نماذج الشبكات Network Models.
- نماذج تخطيط المشروعات Project Planning Models.
- تحليل الصفوف Queuing Analysis.
- نماذج المباريات Games Models.

وسوف نستخدم برامج هذه الحزمة في حل مشاكل البرمجة الخطية في الباب الثالث ومشاكل النقل في الباب الرابع ومشاكل التخصيص في الباب الخامس.

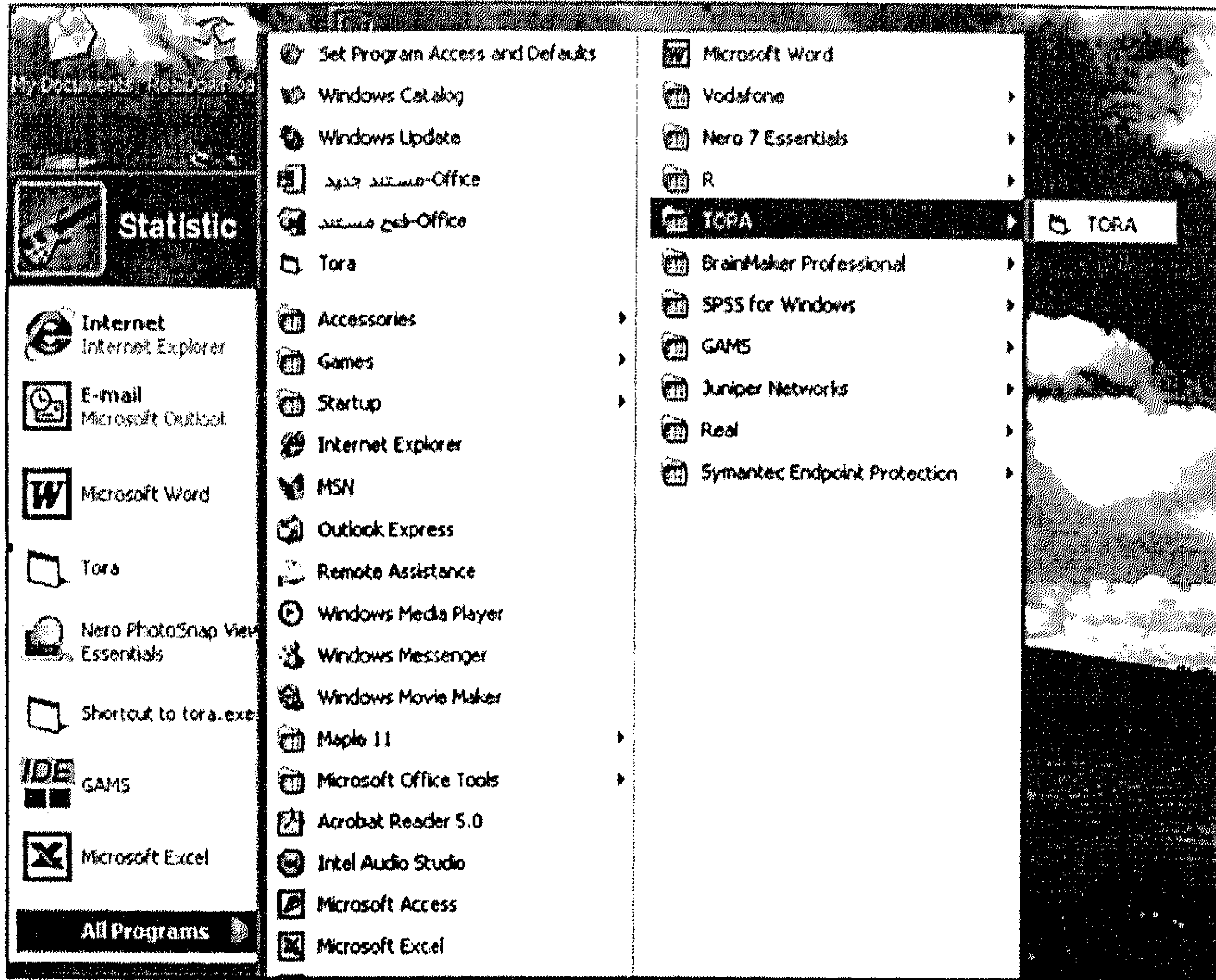
تشغيل برامج TORA

لتشغيل برامج TORA يتم أتباع الخطوات التالية:

١- من قائمة Start نختار All Programs.

٢- من قائمة All Programs نختـــار TORA، ومـــن TORA نختـــار TORA كما هو موضح في الشكل التالي:

شكل (١)

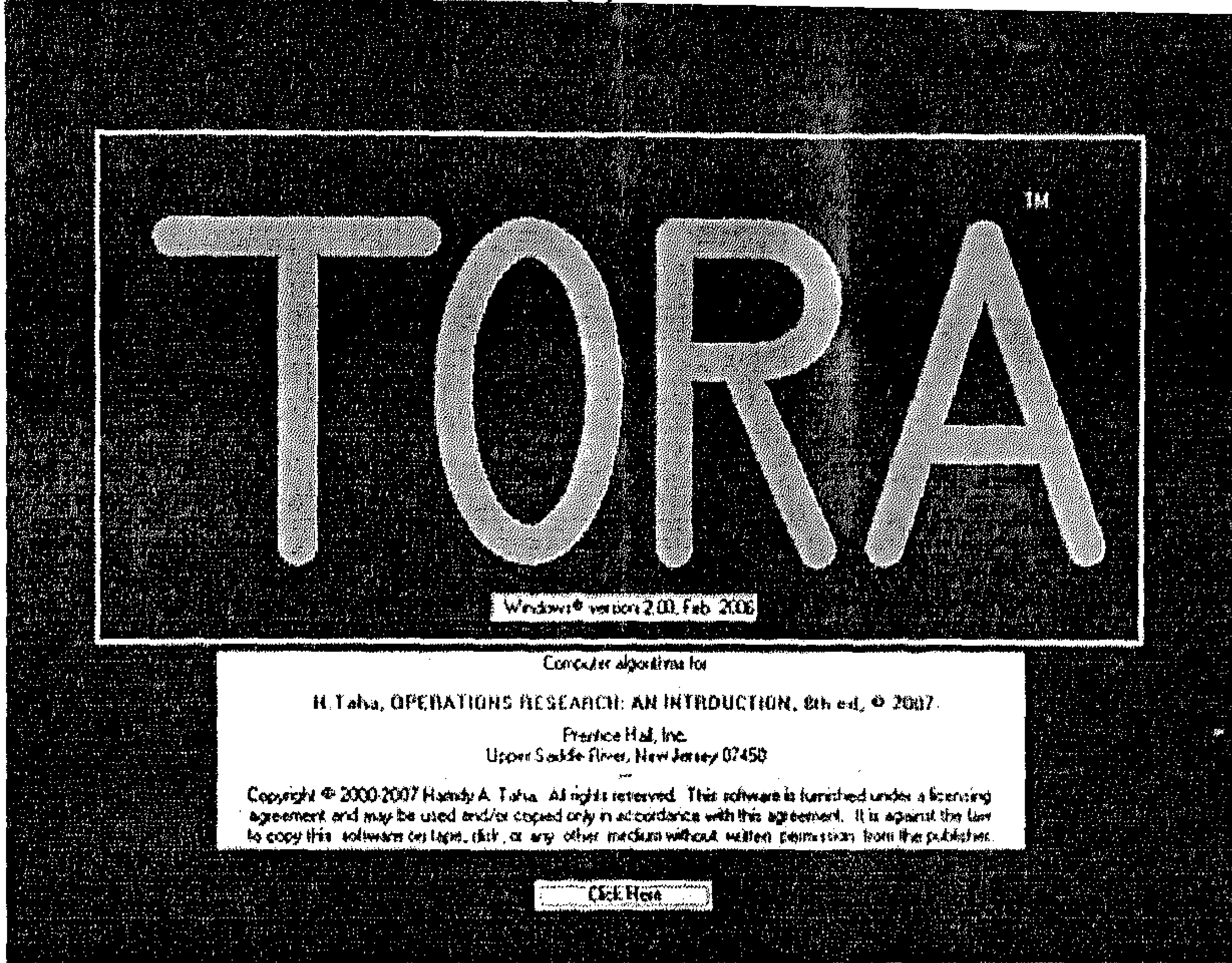


٣- وبالضغط على TORA في (١) يتم فتح النافذة في شكل (٢) وهي عبارة عن نافذة تعرف برنامج TORA وكذلك رقم إصدارها Version وتاريخ ظهور هذا الإصدار. والإصدار المستخدم في هذا الكتاب إصدار Version2 الذي ظهر في شكل (٢).

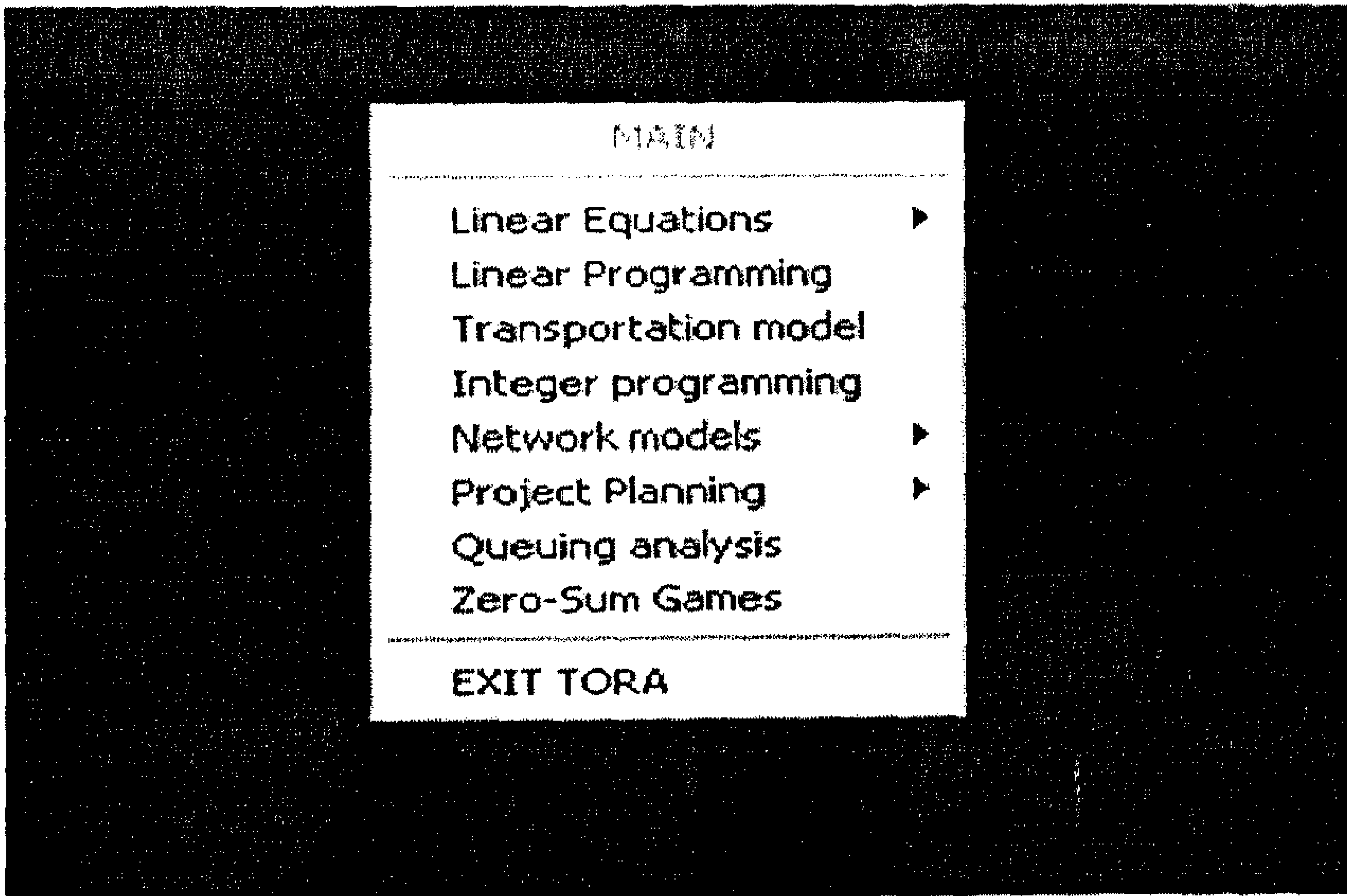
٤- بالضغط على Click Here في شكل (٢) – فتظهر النافذة الموضحة في شكل (٣).

في شكل (٣) تظهر القائمة الرئيسية Main Menu التي تحتوي على برامج الحاسب في حزمة TORA.

شكل (٢)

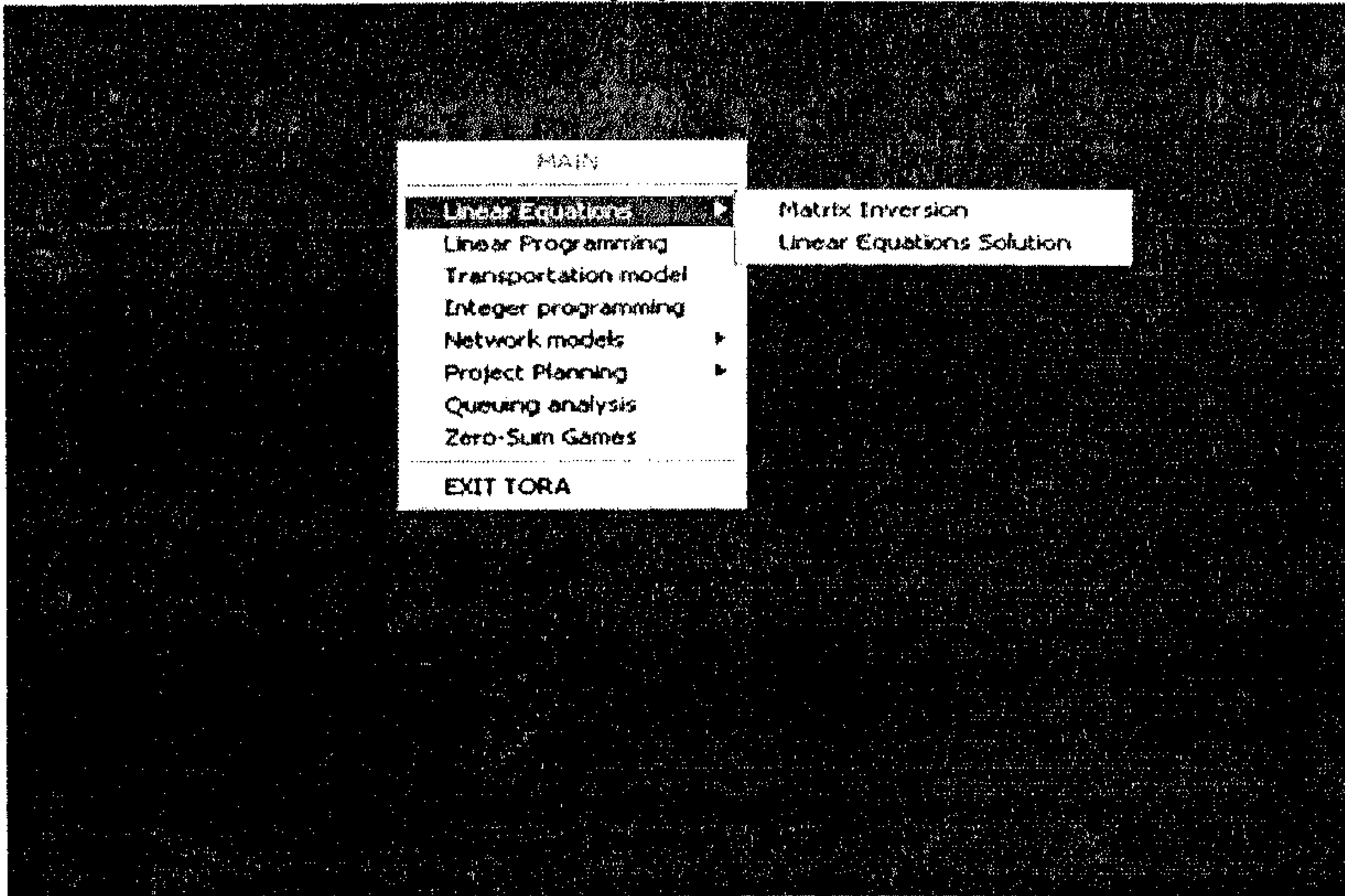

TORA
TM
Windows® version 2.00, Feb 2006
Computer algorithms for
H. Taha, OPERATIONS RESEARCH: AN INTRODUCTION, 8th ed., © 2007
Prentice Hall, Inc.
Upper Saddle River, New Jersey 07458
Copyright © 2000-2007 Hamdy A. Taha. All rights reserved. This software is furnished under a licensing agreement and may be used and/or copied only in accordance with this agreement. It is against the law to copy this software on tape, disk, or any other medium without written permission from the publisher.
Click Here

شكل (٣)


MAIN
Linear Equations
Linear Programming
Transportation model
Integer programming
Network models
Project Planning
Queuing analysis
Zero-Sum Games
EXIT TORA

٥- من القائمة في شكل (٣) يتم الضغط على الأسلوب المطلـــوب اســـتخدامه فتفتح قائمة فرعية تشير إلى البرامج الخاصة بطرق حل المشاكل الخاصة بهذا الأسلوب. فمثلاً عند الضغط على أسلوب **Linear Programming** فيتم فتح النافذة في شكل (٤) – التي تشتمل على طرق الحل المختلفة.

شكل (٤)



٦- يتم الضغط على الطريقة المطلوب استخدامها في الحل كما هو موضح في شكل (٤) أيضاً.

وفي الباب الثالث سوف نوضح كيفية استخدام TORA في حـــل مـــشاكل البرمجة الخطية، وفي البابين الرابع والخامس نستخدم TORA في حل مـــشاكل النقل والتخصيص من حيث

١- إدخال البيانات.

٢- تشغيل البرنامج.

٣- الحصول على النتائج.

ملحق رقم (F): استخدام حزمة Maple 11

حزمة Maple 11 هي مجموعة من الحزم (البرامج) الجاهزة المستخدمة في الرياضياتMathematics، الأمثليةOptimization، الإحصاء Statistics، ... الخ [٧].

وتعتبر برامج Maple 11 من البرامج الجاهزة التي يسهل تناولها بالنسبة للمستخدمين سواء متخصصين أو غير متخصصين.

ومما هو جدير بالذكر أن كلمة Maple ليست اختصار لعبارة ما كما هو في برامج TORA ولكن Maple إشارة إلى زهرة الـ Maple، وهذه الزهرة هي شعار الجمهورية الكندية بالعلم الكندي وهي أشارة إلى جنسية أول من قدم الحزمة [٨].

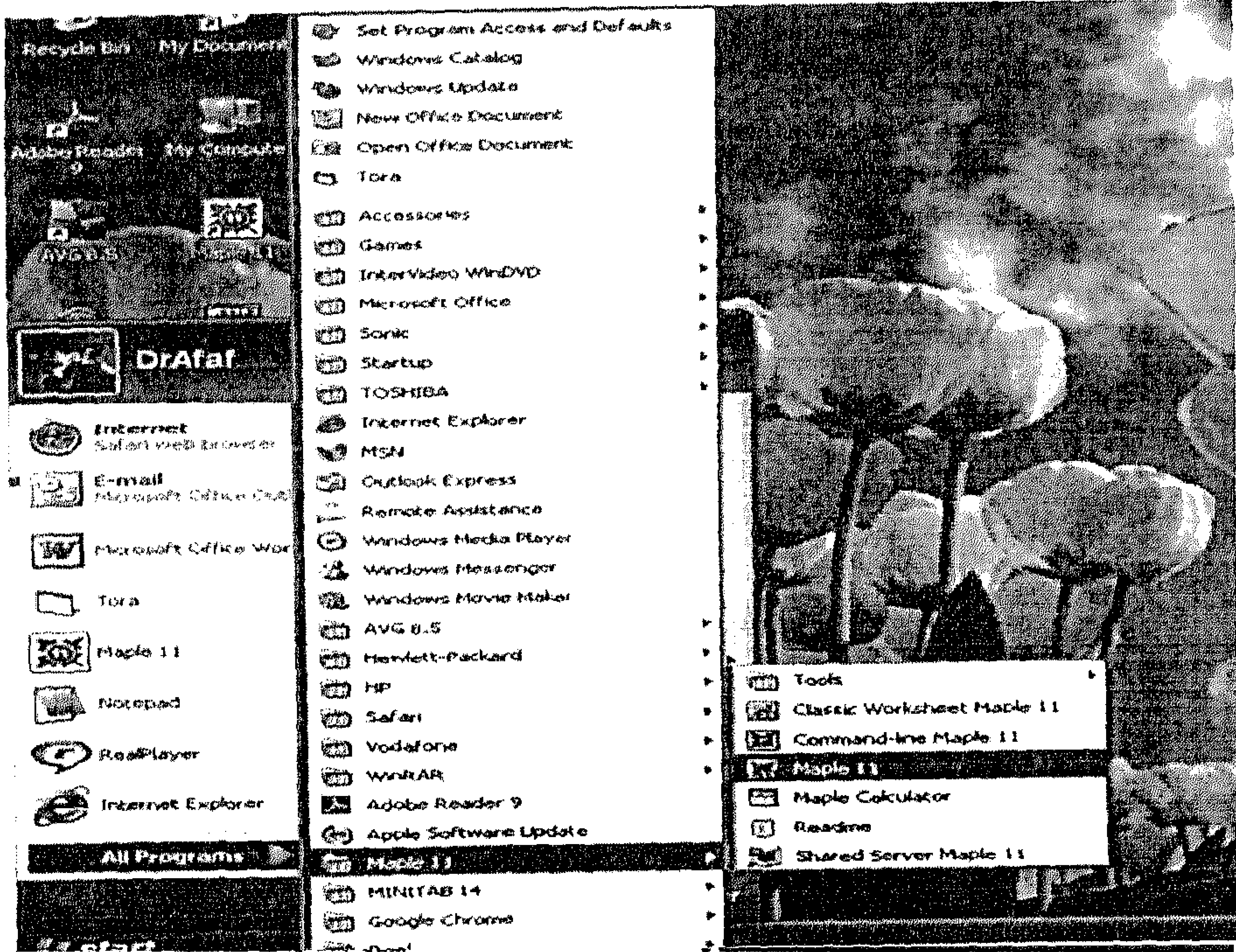
وفي هذا الكتاب يتم استخدام Maple 11 في حل مشاكل البرمجة غير الخطية Nonlinear Programming المرتبطة بالموضوعات المقدمة في الباب التاسع.

وفي هذا الملحق سوف نقدم كيفية استخدام Maple 11 في حل مشاكل البرمجة غير الخطية المقدمة في الباب التاسع في الخطوات التالية:

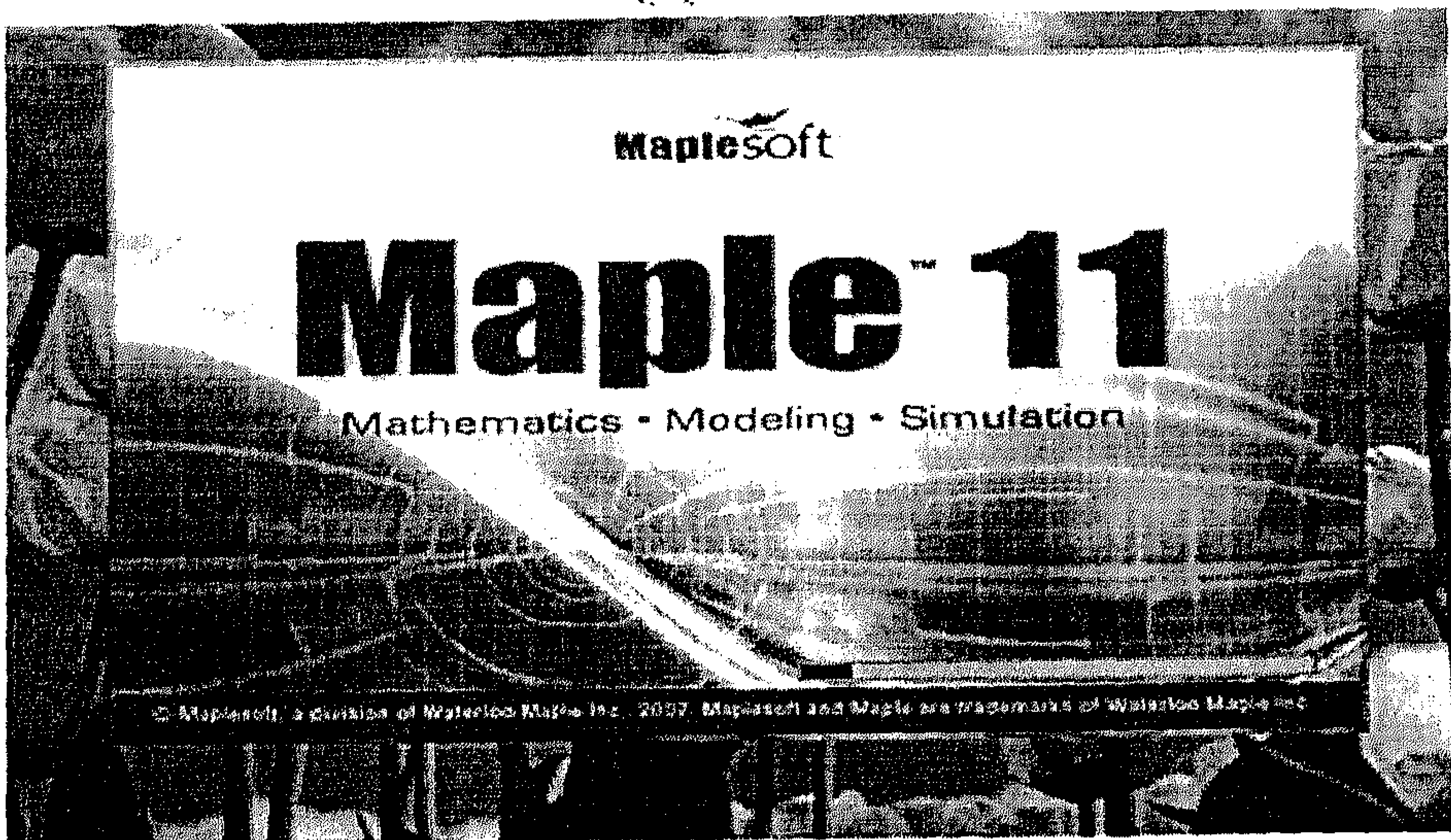
١- من القائمة الرئيسية للبرامج All Program يتم استدعاء برنامج Maple 11 كما هو موضح في شكل (١).

٢- بالضغط المزدوج على ملف التشغيل Maple 11 يتم ظهور واجهة حزمة Maple 11 كما هو موضح في شكل (٢).

شكل (١)

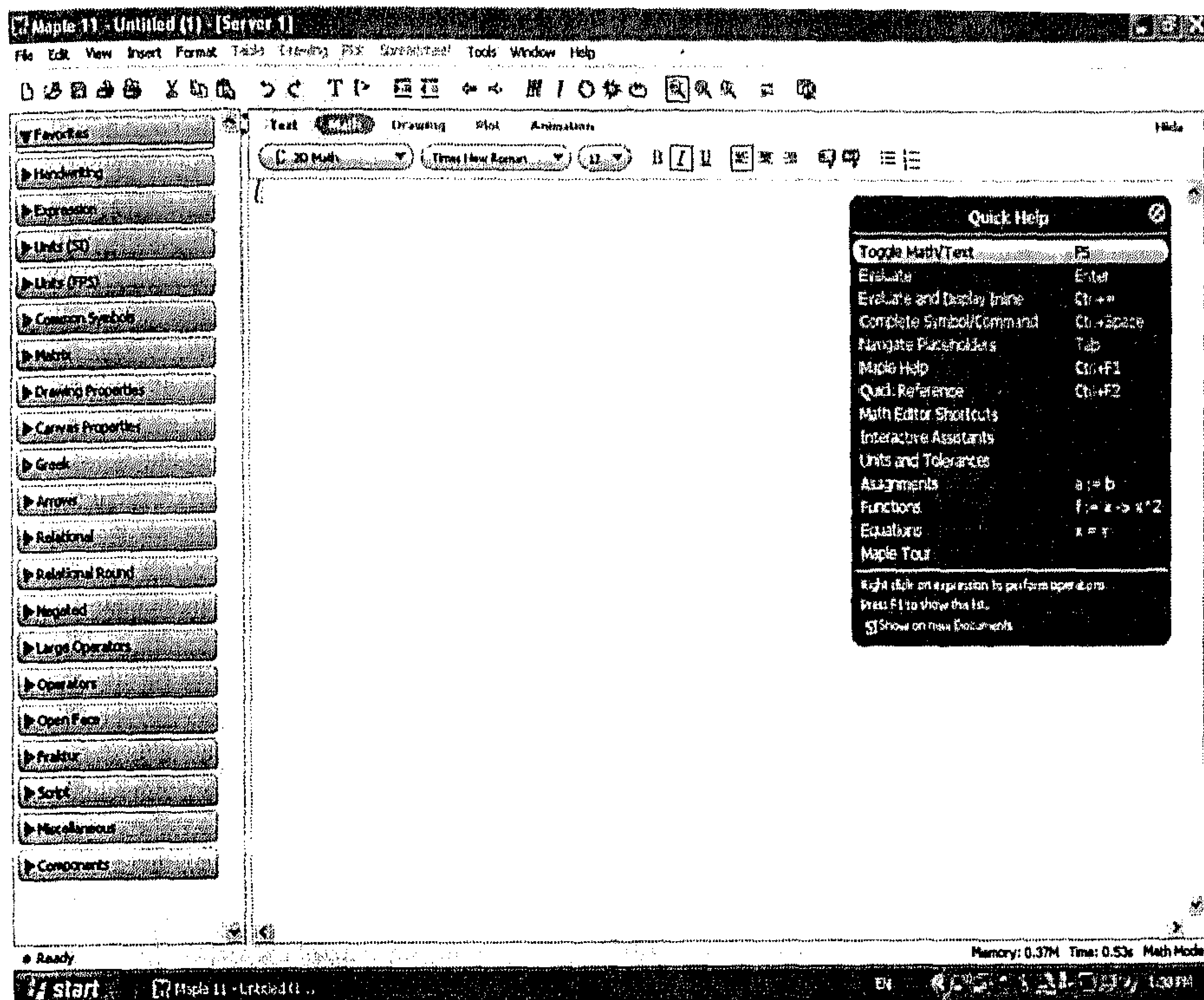

Recycle Bin
My Documents
Adobe Reader 9
My Computer
AVG 8.5
Maple 11
DrAfaf
Internet
Safari web browser
E-mail
Microsoft Office Outlook
Microsoft Office Word
Tora
Maple 11
Notepad
RealPlayer
Internet Explorer
All Programs
Set Program Access and Defaults
Windows Catalog
Windows Update
New Office Document
Open Office Document
Tora
Accessories
Games
InterVideo WinDVD
Microsoft Office
Sonic
Startup
TOSHIBA
Internet Explorer
MSN
Outlook Express
Remote Assistance
Windows Media Player
Windows Messenger
Windows Movie Maker
AVG 8.5
Hewlett-Packard
HP
Safari
Vodafone
WinRAR
Adobe Reader 9
Apple Software Update
Maple 11
MINITAB 14
Google Chrome
Tools
Classic Worksheet Maple 11
Command-line Maple 11
Maple 11
Maple Calculator
Readme
Shared Server Maple 11

شكل (٢)


Maplesoft
Maple™ 11
Mathematics • Modeling • Simulation

يتم فتح النافذة في الشكل التالي:

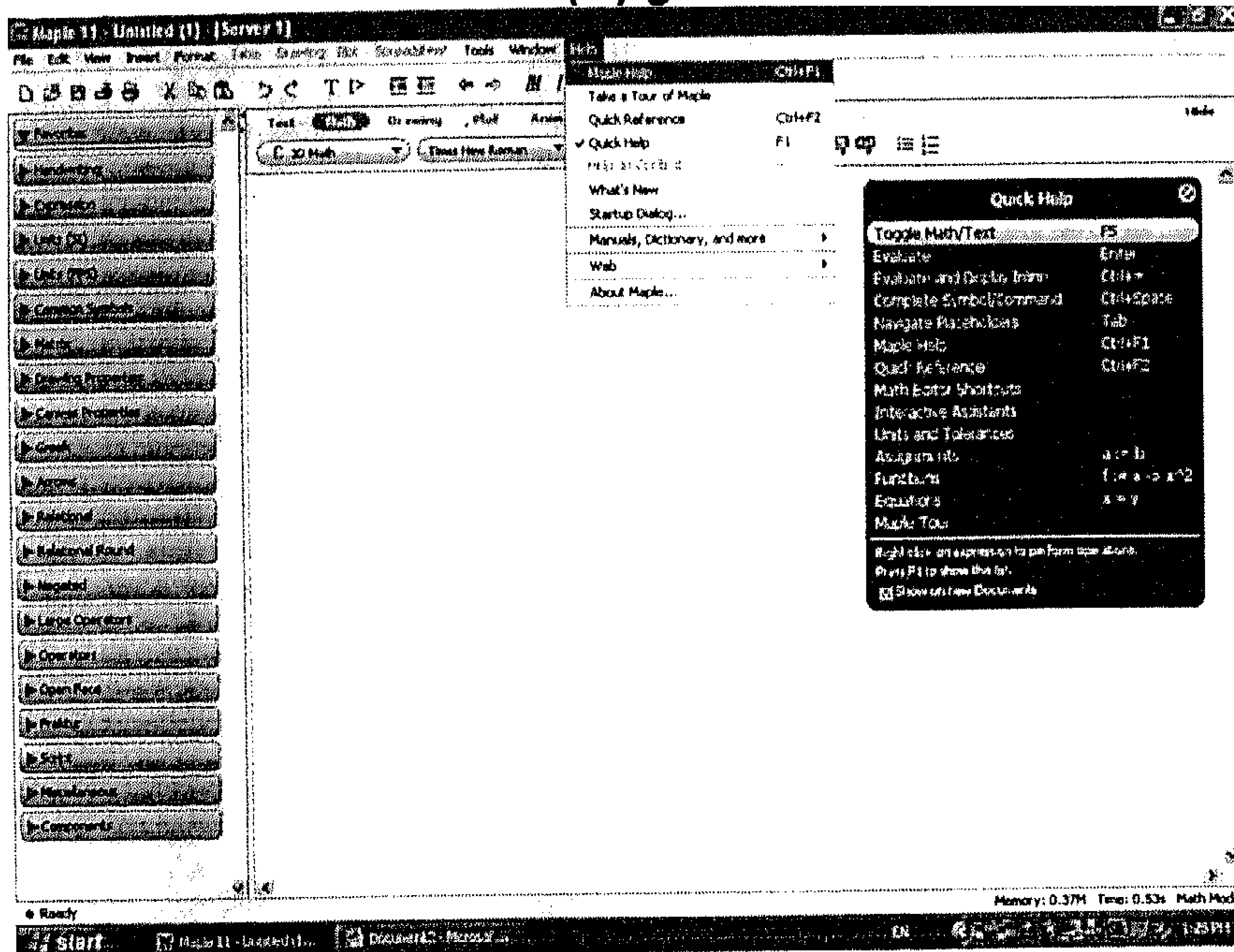
شكل (٣)



٣- النافذة في شكل (٣) تمثل ورقة عمل لبدء تشغيل **Maple 11**. حيث يوجد في أقصى اليمين القائمة المساعدة - وفي أقصى اليسار المستطيل النشط لكتابة الأوامر كما هو موضح في الشكل.

٤- في شريط قوائم الحزمة أعلى النافذة في شكل (٣) يتم اختيار **Help** فيتم فتح القائمة الفرعية نختار منها **Maple Help** كما هو موضح في الشكل التالي.

شكل (٤)

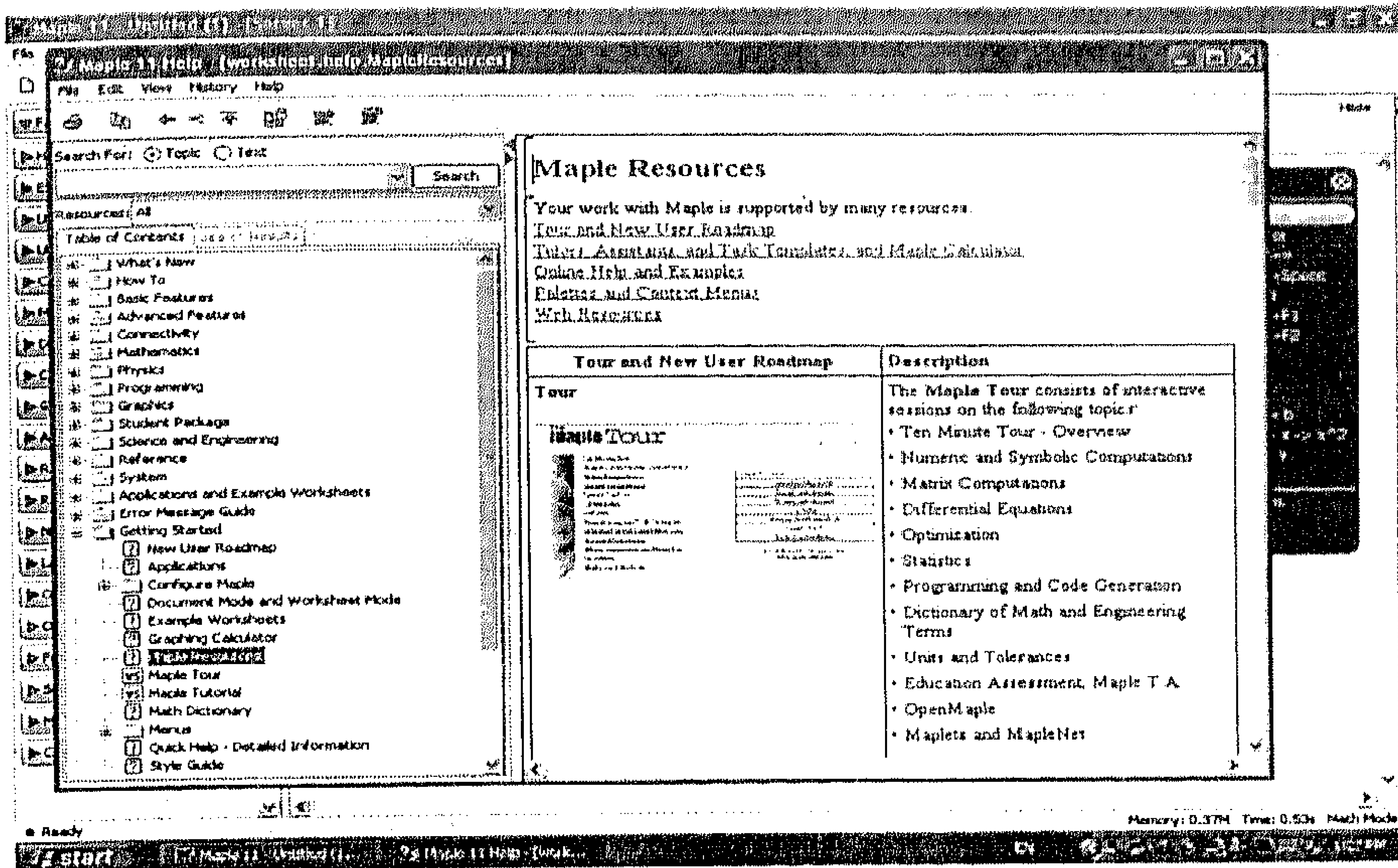


٥- بالضغط على Maple Help في النافذة بالشكل السابق يتم فتح النافذة بالشكل (٥).

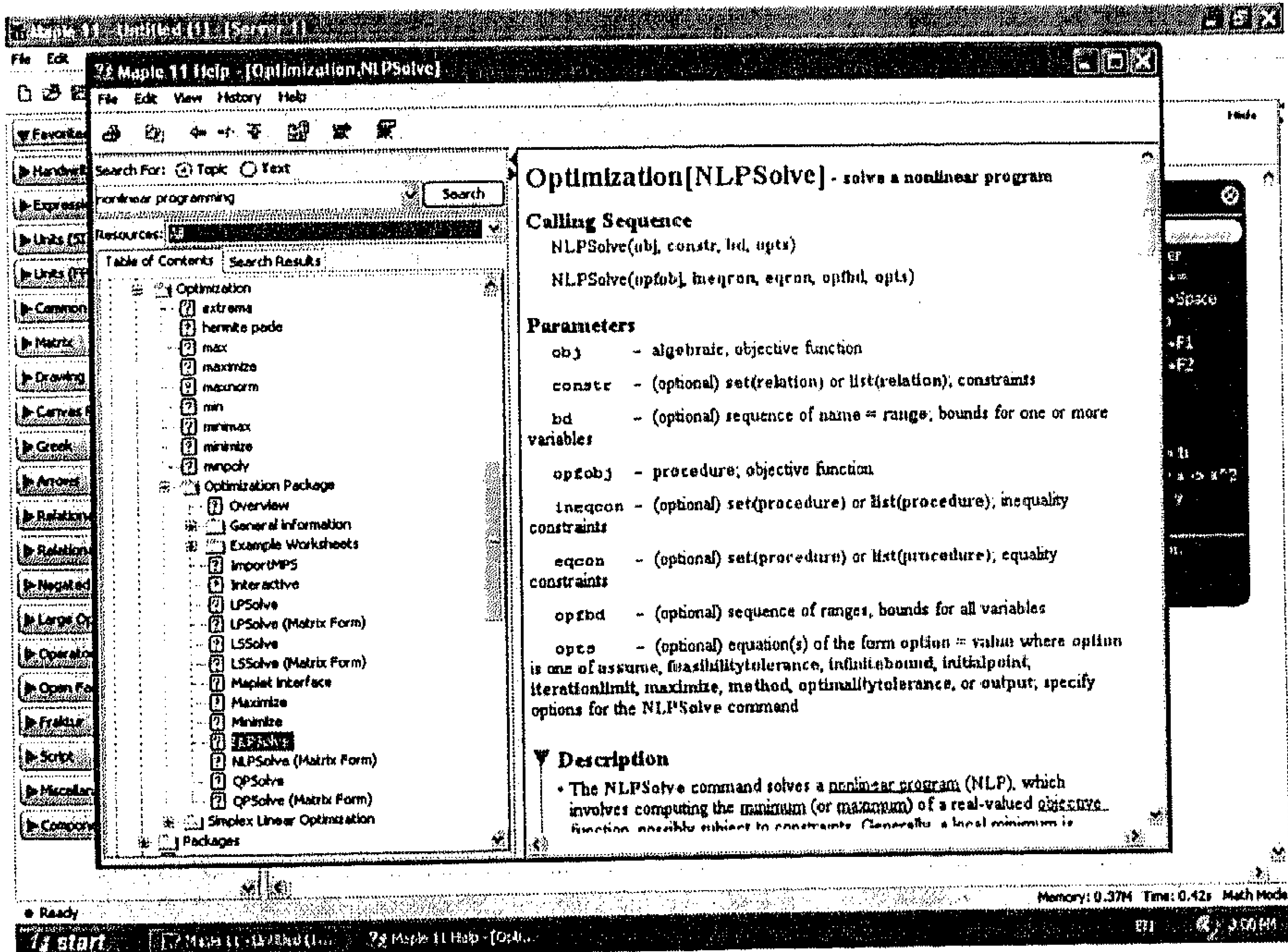
في شكل (٥) نجد في أعلى يسار الصفحة مستطيل يتم كتابة أسم الموضوع المراد البحث عن معلومات تتعلق به فيتم كتابة Nonlinear Programming ثم الضغط على Search فيتم فتح القائمة الفرعية، يتم منها اختيار NLPSolve في شكل (٦).

٦- في النافذة الموضحة في شكل (٦) يتضح توصيف لأوامر إدخال المشكلة وأوامر الحصول على المخرجات (النتائج) كذلك الطرق المختلفة للحل موضحة في الصفحة يمين القائمة الفرعية هذا بالإضافة إلى عدد من الأمثلة كما هو موضح في شكل (٧).

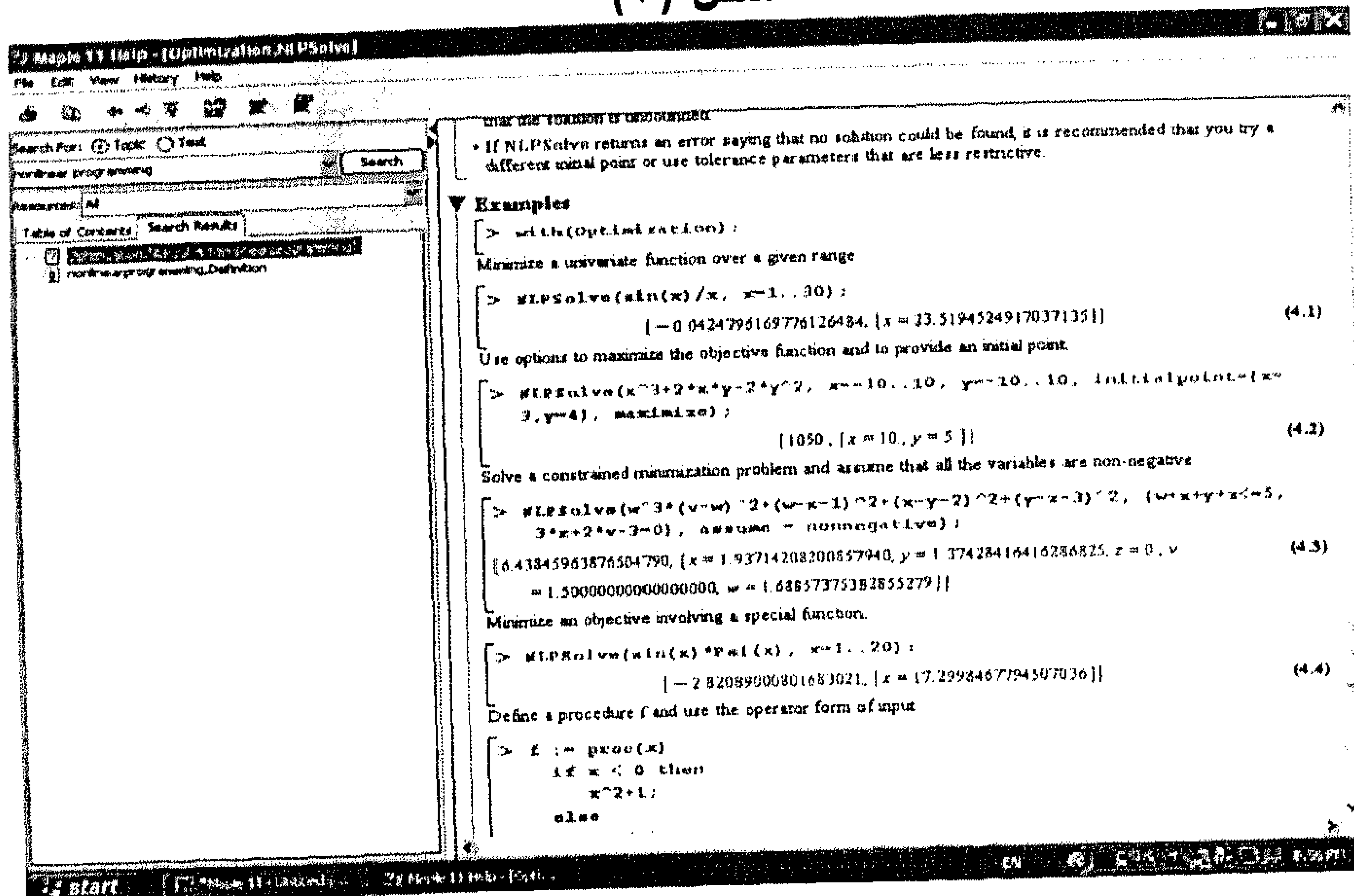
شكل (٥)


Maple Resources
Your work with Maple is supported by many resources.
Tour and New User Roadmap
Online Help and Examples
Web Resources
Tour and New User Roadmap
Description
Tour
The Maple Tour consists of interactive sessions on the following topics:
Ten Minute Tour - Overview
Numeric and Symbolic Computations
Matrix Computations
Differential Equations
Optimization
Statistics
Programming and Code Generation
Dictionary of Math and Engineering Terms
Units and Tolerances
Education Assessment, Maple T.A.
OpenMaple
Maplets and MapleNet
Search For: Topic Text
Search
Table of Contents
What's New
How To
Basic Features
Advanced Features
Connectivity
Mathematics
Physics
Programming
Graphics
Student Package
Science and Engineering
Reference
System
Applications and Example Worksheets
Error Message Guide
Getting Started
New User Roadmap
Applications
Configure Maple
Document Mode and Worksheet Mode
Example Worksheets
Graphing Calculator
Maple Tour
Maple Tutorial
Math Dictionary
Menus
Quick Help - Detailed Information
Style Guide
Ready
start

شكل (٦)


Maple 11 Help - [Optimization,NLPSolve]
File Edit View History Help
Search For: Topic Text
nonlinear programming
Search
Table of Contents
Search Results
Optimization
extrema
hermite pade
max
maximize
maxnorm
min
minimax
minimize
minpoly
Optimization Package
Overview
General information
Example Worksheets
ImportMPS
Interactive
LPSolve
LPSolve (Matrix Form)
LSSolve
LSSolve (Matrix Form)
Maplet Interface
Maximize
Minimize
NLPSolve (Matrix Form)
QPSolve
QPSolve (Matrix Form)
Simplex Linear Optimization
Packages
Optimization[NLPSolve] - solve a nonlinear program
Calling Sequence
NLPSolve(obj, constr, bd, opts)
NLPSolve(opfobj, ineqcon, eqcon, opfbd, opts)
Parameters
obj - algebraic, objective function
constr - (optional) set(relation) or list(relation); constraints
bd - (optional) sequence of name = range; bounds for one or more variables
opfobj - procedure; objective function
ineqcon - (optional) set(procedure) or list(procedure); inequality constraints
eqcon - (optional) set(procedure) or list(procedure); equality constraints
opfbd - (optional) sequence of ranges, bounds for all variables
opts - (optional) equation(s) of the form option = value where option is one of assume, feasibilitytolerance, infinitebound, initialpoint, iterationlimit, maximize, method, optimalitytolerance, or output; specify options for the NLPSolve command
Description
The NLPSolve command solves a nonlinear program (NLP), which involves computing the minimum (or maximum) of a real-valued objective function
Ready
start

شكل (٧)



٧- وفيما يلي بعض الأوامر لحل مشاكل البرمجة غير الخطية.

يوجد بحزمة Maple عديد من البرامج المختلفة لحل مشاكل البرمجة الخطية. وفيما يلي سوف نقدم بعض الأوامر المستخدمة في إدخال البيانات والحصول على المخرجات لحل مشاكل البرمجة غير الخطية وفقاً لطبيعة المشكلة.

٨- <u>إذا كانت المشكلة غير مقيدة</u>

أ) إذا كانت دالة الهدف في متغير واحد - فيكون أمر إدخال البيانات على النحو التالي:

With (Optimization):

NLpSolve (دالة الهدف , مدي المتغير); **(f.1)**

إذا كان الهدف تصغير **minimizing**.

ملحوظة: أما إذا كان المطلوب تعظيم دالة الهدف **maximizing** فيتم كتابة **maximize** على النحو التالية:

NLpSolve (دالة الهدف , مدي المتغير maximize); **(f.2)**

وسوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي:

<u>مثال (١)</u>: إذا فرضنا الدالة Z على النحو التالي:

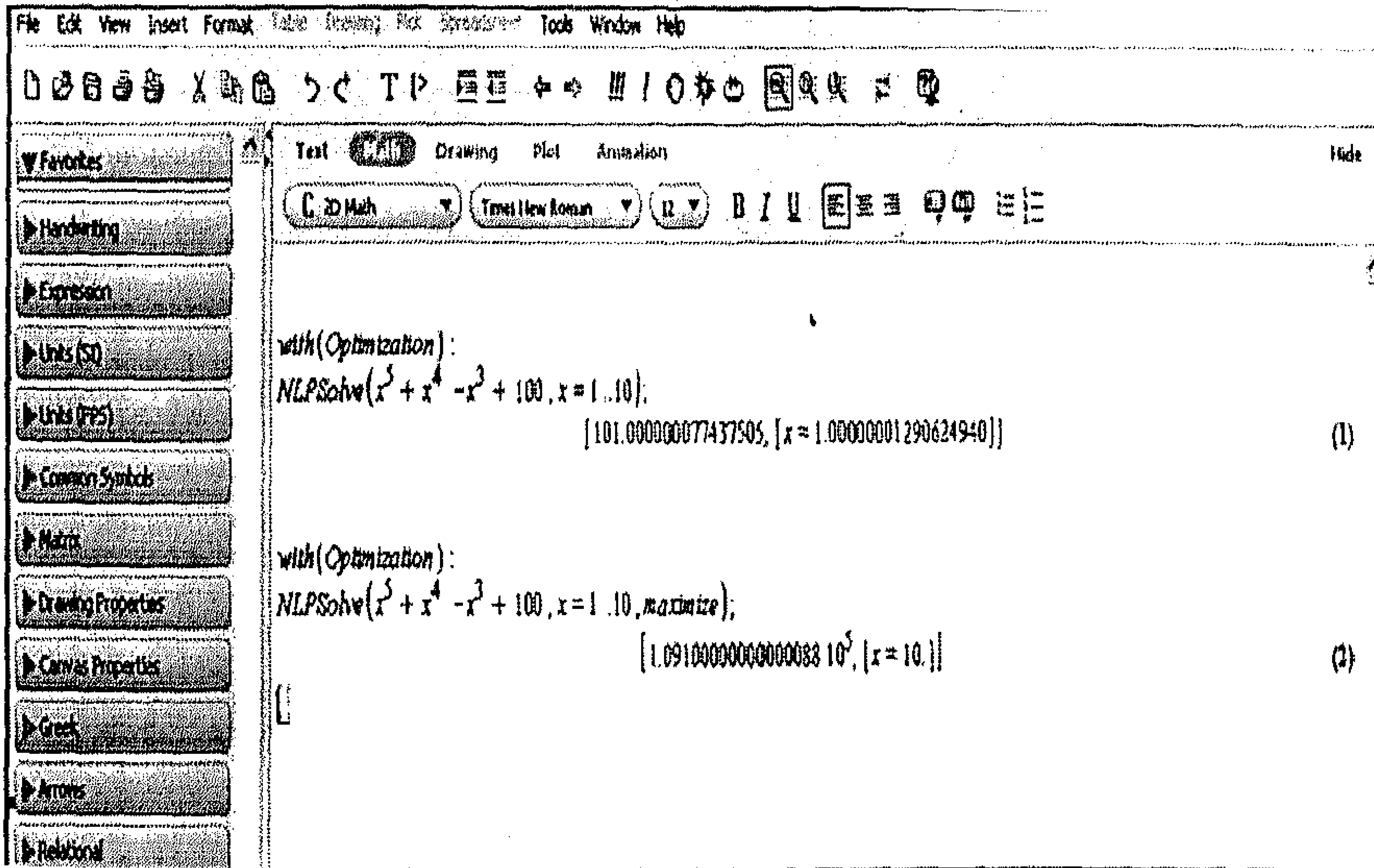
$$Z = X^5 + X^4 - X^3 + 100 \quad , \quad 1 \leq X \leq 10$$

المطلوب: ١- أوجد أحد نقط النهاية الصغرى للدالة Z.

٢- أوجد أحد نقط النهاية العظمى للدالة Z.

الحل: ١- يتم إدخال البيانات كما في أمر (f.1) ثم الضغط على مفتاح **Enter** من لوحة المفاتيح فيتم الحصول على نقطة النهاية الصغرى كما في (1) في شكل(٨).

شكل (٨)



ومن الشكل يتضح أن نقطة النهاية الصغرى في (١) على النحو:

$$Z^* = 101.00 \quad , \quad X^* = 1.00$$

٢- كذلك بإدخال بيانات Z كما في أمر (f.2) نحصل على نقطة النهاية العظمى كما في (2) في شكل (٨) حيث:

$$Z^* = 109100 \quad , \quad X^* = 10$$

ب) إذا كانت المشكلة مشكلة غير مقيدة ولكن في عدة متغيرات والمطلوب إيجاد حل الطرق التقريبية، باستخدام نقطة مبدئية Initial Point محددة فيكون أمر إدخال البيانات على النحو التالي:

With (Optimization):

NLpSolve(دالة الهدف, مدى المتغيرالأول, مدي المتغيرالثاني,.., النقطةالمبدئية);
(f.3)

<u>مثال (٢)</u>: اعتبر الدالة Z حيث

$$Z = X^3 + 2XY - 2Y^2 \quad , \quad -10 \le X \le +10$$
$$-10 \le Y \le +10$$

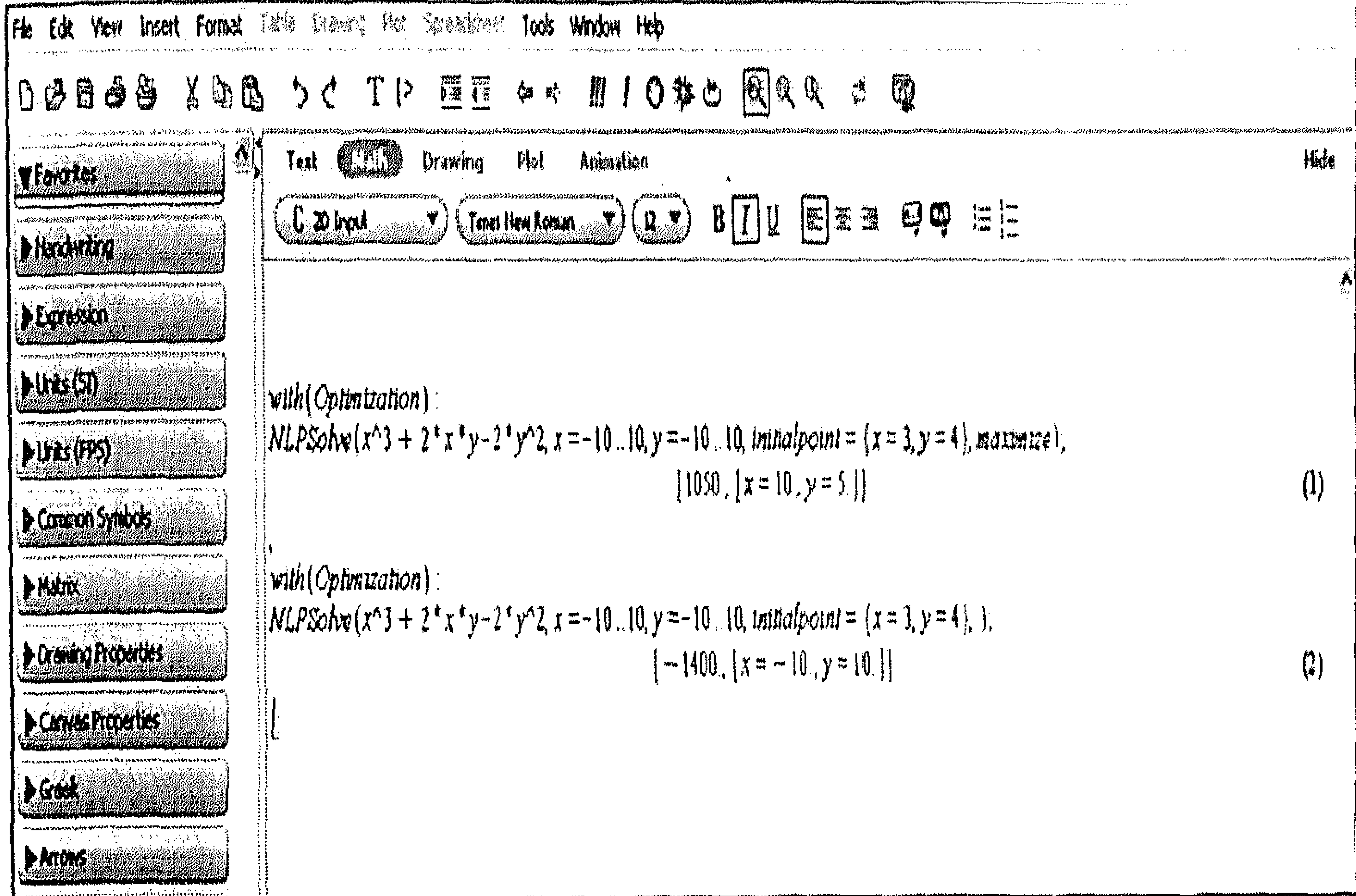
أوجد: ١- النهاية العظمى للدالة Z.

٢- النهاية الصغرى للدالة Z.

مع اعتبار أن نقطة الحل المبدئية $(X = 3 \ , \ Y = 4)$

الحل: ١- يتم إدخال البيانات كما في أمر (f.3) كما هو موضح في (1) بشكل (٩) – ثم الضغط على مفتاح Enter من لوحة المفاتيح.

شكل (٩)



فنحصل على النهاية العظمى على النحو:

$$Z^* = 1050 \quad , \quad X^* = 10 \quad , \quad Y^* = 5$$

٢- في أمر الإدخال (f.3) إذا تم إلغاء Maximize في إدخال (f.3) ثم الضغط على Enter فيتم الحصول على النهاية الصغرى كما هو في (2) في شكل (٩) على النحو:

$$Z^* = -1400 \quad , \quad X^* = -10 \quad , \quad Y^* = 10$$

٩- <u>إذا كانت المشكلة مقيدة</u>

فإذا كان الهدف تصغير دالة الهدف في هذه الحالة يكون أمر إدخـــال البيانـــات على النحو التالي:

With (Optimization):

NLpSolve(دالة الهدف, {القيود} , assume=nonnegative);   (f.4)

ملحوظة: ١- إذا كانت المتغيرات حقيقية فيتم إلغـــاء assume=nonnegative في أمر الإدخال (f.4).

٢- يضف maximize إذا كان الهدف تعظيم دالة الهدف.

<u>مثال (٣)</u>: إذا فرضنا الدالة H حيث

$$H = W^3(V - W)^2 + (W - X - 1)^2 + (X - Y - 2)^2 + (Y - Z - Z)^2$$

$$\begin{aligned} \text{S.T.}\quad & W + X + Y + Z \le 5 \\ & 3Z + 2V - 3 = 0 \\ & W, V, X, Y, Z \ge 0 \end{aligned}$$

١- أوجد النهاية الصغرى للدالة H تحت القيود الموضحة.

٢- أوجد النهاية العظمى للدالة H تحت القيود الموضحة

الحل: ١- يتم إدخال البيانات كما في أمر إدخال البيانات (f.4) ثم الـــضغط علـــى مفتاح Enter فيظهر حل المشكلة كما في شكل (١٠)

فنجد أن الحل المثل:

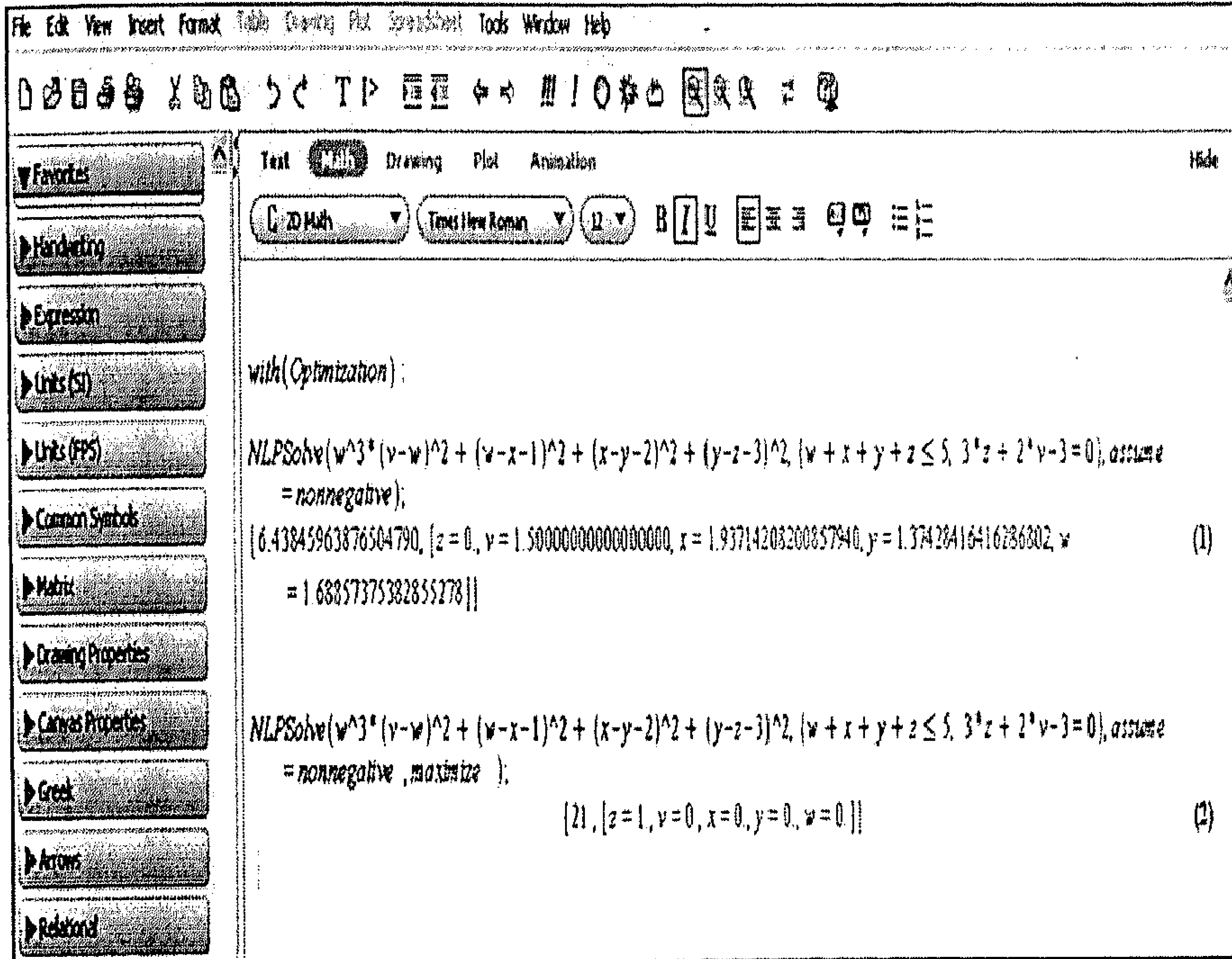
$$H^* = 6.438460 \;,\; Z^* = 0 \;,\; V^* = 1.5 \;,$$

$$X^* = 1.937142 \;,\; Y^* = 1.37484 \;,\; W^* = 1.688573$$

كذلك بإضافة maximization في أمر إدخال البيانات (f.4) ثـــم الـــضغط علـــى مفتاح Enter نحصل على الحل الأمثل لتعظيم دالة الهـــدف كمـــا فـــي (2) فـــي شكل(١٠) حيث:

$$H^* = 21 \;,\; Z^* = 1 \;,\; V^* = 0 , X^* = 0 \;, Y^* = 0 \;, W^* = 0$$

شكل (١٠)



ملحق رقم (J): الإحصاء Statistics

كما أوضحنا في الباب الأول مدي أتساق علوم الإحصاء ببحوث العمليات. وفيما يلي سوف نوضح باختصار ما هي الإحصاء واتساقها ببحوث العمليات.

لقد أصبحت علوم الإحصاء (الإحصاء التطبيقي Applied Statistics، الإحصاء الرياضي Mathematical Statistics، الإحصاء السكاني Demography، ... الخ) بمفاهيمها الحديثة المرتبطة ارتباط وثيق بتكنولوجيا المعلومات والحاسبات والاتصالات ضرورة لا غني عنها في جميع فروع المعرفة: الاقتصادية، الطبية، الإدارية، السياسية، ...الخ [34,40].

وتمثل علوم الإحصاء بمفاهيمها الحالية مجموعة النظريات والأساليب المستخدمة لجمع Collecting وعرض Presentation وتحليل Analysis البيانات Data للوصول إلى أفضل القرارات Best Decision بالنسبة للمشاكل موضع الدراسة أو التخطيط للأنظمة القائمة أو المستحدثة [٩].

ولقد أدى التطور العظيم في علوم الحاسبات والاتصال في العشرين عام السابقة إلى تطوير علوم الإحصاء وسهولة تناولها وتطبيقها على نطاق واسع في جميع المجالات: الزراعية، الصناعية، التجارية، ....الخ.

وبصفة عام يمكن تقسيم علوم الإحصاء إلى فرعين أساسيين هما:

- الإحصاء الوصفي Descriptive Statistics.
- الإحصاء التحليلي (أو الاستدلال الإحصائي) Analytical Statistics (Statistical Inference).

الإحصاء الوصفي:

هي الفرع الذي يهتم بتقديم وتطوير وتطبيق أساليب جمع وعرض البيانات، أو بعبارة أخرى الفرع الذي يمكن باستخدامه تحويل البيانات إلى معلومات Information [34].

الاستدلال الإحصائي:

هو الفرع الذي يهتم بتقديم وتطوير وتطبيق طرق وأساليب التقدير Estimation والتنبؤ Forecasting للظواهر محل الدراسة وأسبابها وعلاقتها بالظواهر الأخرى. أي هو الفرع الذي يقدم النظريات والأساليب التي يمكن باستخدامها تحويل المعلومات إلي معرفة Knowledge [40].

وفي كثير من الكتابات يتم تقسيم أساليب الاستدلال الإحصائي إلى فئتين هما:

- الفئة الأولي: أساليب التقدير والتنبؤ.
- الفئة الثانية: أساليب اختبارات الفروض الإحصائية.

أنواع البيانات:

البيانات التي يتم جمعها قد تكون في صورة بيانات كمية Quantitive data وقد تكون غير كمية Unquantitive Data أو ما تسمي بالبيانات النوعية Qualitative Data، حيث يمكن في بعض الحالات تحويل البيانات النوعية إلى بيانات كمية وتسمي البيانات في هذه الحالة بالبيانات الترتيبية Ranked Data *

* د. عفاف الدش (٢٠٠٢): "الإحصاء التطبيقي للتجاريين – الجزء الأول" جهاز نشر وتوزيع الكتاب الجامعي – جامعة حلوان – القاهرة.

جمع البيانات:

مما سبق يتضح أن البيانات هي المادة الرئيسية في أي دراسة إحصائية. فعلى قدر توافر البيانات وشمولها ودقتها تتوقف دقة الدراسة وأهمية النتائج وصحة وفاعلية القرارات المبنية عليها.

ويوجد أسلوبين لجمع البيانات هما [53]:

أ) أسلوب المسح الشامل Census (Population) Survey.

ب) أسلوب العينة Sampling Survey.

المفردة:

عادة تهتم الدراسة بالأفراد أو الأشياء وخصائصهم والعلاقات بينهم. والأفراد أو الأشياء محل الدراسة تسمى بالمفردات أو الوحدات Items (Units).

المجتمع الإحصائي:

هو جميع المفردات المرتبطة بالظاهرة (أو المشكلة) محل الدراسة.

العينة: هي فئة جزئية من المجتمع محل الدراسة.

استمارة جمع البيانات Questionnaire:

يتم جمع البيانات من المفردات محل الدراسة في استمارة تسمى باستمارة جمع البيانات. ولابد أن تتوافر فيها مجموعة من الشروط والضوابط [34].

عرض البيانات:

بعد جمع البيانات يتم عرضها في أشكال مختلفة مثل الجداول التكرارية Frequency Tables أو الأشكال البيانية Graphic Figures مثل المدرج التكراري Histogram وعرض البيانات يعطي متخذ القرار صورة رقمية مبدئية

لحدود المشكلة (أو الظاهرة). ولكن للحصول على صورة رقمية دقيقة فـإن ذلـك يتطلب الحصول على معلومات Information من البيانات ثم تحويل المعلومـات إلى معرفة Knowledge.

المعلومات:

من البيانات التي تم جمعها ممكن تحديد خصائص المتغيرات محل الدراسة من خلال العديد من المؤشرات مثل مؤشرات الموضع Measures of Location مثل الوسط الحسابي، الوسيط، ومؤشرات التـشتت Measures of Variation .... الخ. وبذلك يمكن تحويل البيانات إلى معلومات.

المعرفة:

إذا أمكن تحديد شكل الصياغة (أو الصياغات) الإحـصائية للعلاقـة بـين المتغيرات محل الدراسة، أو الصياغات الإحصائية لسلوك المتغيرات محل الدراسة ففي هذه الحالة يتم تحويل المعلومات إلى معرفة. كذلك إذا أمكن الحـصول علـى المؤشرات الإحصائية من بيانات عينة وأمكن باستخدامها عـن طريـق أسـاليب التقدير مثلاً تحديد علاقتها بالمؤشرات المناظرة لها في المجتمع باستخدام أساليب الاستدلال الإحصائية فإنه يمكن تحويل المعلومات إلى معرفة أيضاً.

ومن هنا يمكن القول أن أساليب التقـدير والتنبـؤ، وأسـاليب اختبـارات الفروض الإحصائية - من الأساليب الهامة لتحويل المعلومات إلى معرفـة حتـى يمكن استخدامها في بناء ونماذج بحوث العمليات - حيث لا يمكن استخدام أساليب العمليات إلا في حالة تحويل البيانات إلى معلومات أو معرفة [9].

ومن هنا يتضح أهمية واتساق الأساليب الإحصائية بتطبيق وتطوير أساليب بحوث العمليات

المصطلحات

المصطلح بالعربي	رقم الصفحة	المصطلح باللغة الانجليزية
الموارد الوفيرة	٣١٣	abundant resources
الحلول المثلى البديلة	١٦٤	alternative optimal solutions
تحليل البيانات	٣٥	analysis data
النماذج التحليلية	٣٢	analytic models
الإحصاء التحليلي (الاستدلال الإحصائي)	٥٠٩	analytical statistics (statistical inference)
الأساليب التحليلية	٢٥	analytical techniques
الإحصاء التطبيقي	٥٠٩	applied statistics
الطرق التقريبية العددية	٤١٠	approximate numerical methods
القيمة التقريبية	٤١٧	approximated value
المتباينة الحسابية الهندسية	٤٤٩	arithmetic-geometric inequality

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح بالعربي
artificial variable	١٢٩	المتغير المصطنع
assignment model	٢٥١	نموذج التخصيص
balanced transportation model	١٩٩، ٢٠١	نموذج النقل المتوازن
basic feasible solutions points	٨٩	نقط حلول أساسية ممكنة
basic non-feasible solutions points	٨٩	نقط حلول أساسية غير ممكنة
basic variables	١٠٠،٣٠١،٣٤٥	المتغيرات الأساسية
best alternative	٢٢	أفضل بديل
best compromise solutions	١٧٣	أفضل الحلول التوافقية
bidding models	٣١	نماذج المضاربة
binding constraint	١٦٤	قيد يتحقق في صور متساوية
bounded optimal solution	١٦٩	حل أمثل محدد

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح بالعربي
bounded set	٣٥٦	فئة محددة
bounded variables algorithm	٣٤٣	خوارزم المتغيرات المحددة
canonical form	٢٧٢،٣٣٠،٣٣٥	الصياغة المتعارف عليها
census (population) survey	٥١١	أسلوب المسح الشامل
classical optimization problems	٤٠١	مشاكل الأمثلية التقليدية
closed bounded convex set	٤٠٣	فئة مغلقة وحدودية ومحدبة
closed loop	٢١٨،٢١٩	المسار المغلق
Cofactor's method	٤٧٧	طريقة المرافقات
collecting data	٣٥	جمع البيانات
column vector	٤٧٢	متجه عمودي
competitive techniques	٣١	أساليب المنافسة
computational techniques	٣٤٣	الأساليب الحسابية

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح بالعربي
concave function	٤٢٤،٤٣٤،٤٨٧	دالة مقعرة
conflicting constraints	١٧٣	قيود متعارضة
constants	٦٥	مقادير ثابتة
constrained posynomial GP problems	٤٦٤	مشاكل البرمجة الهندسية المقيدة ذات الحدود الموجبة
constrained problems	٤٠٢،٤٢٤	المشاكل المقيدة
constraints (restrictions)	٣٤،٤٧	القيود
continuous functions	٣٩٨	دوال متصلة
controlled variables	٣٤،٤٧	المتغيرات التحكمية
convex combination	٣٤٧	التوليفة المحدبة
convex function	٤٢٤،٤٣٤،٤٨٥	دالة محدبة
convex set	٣٥،٣٤٩،٣٥٤،٣٩٧	الفئة المحدبة
corner points	٢١٨	النقط الركنية

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح بالعربي
current solution	٢٢٠،٣٠١	الحل الحالي
cyclic service systems	٣١	أنظمة الخدمة الدائرية
cycling	١٧٣،١٧٤	الدوران
data	٢١،٢٣	بيانات
data base	٢٣	قواعد البيانات
decision variables	٣٣،٤٧	المتغيرات القرارية
decision's maker	١٩،٢٢	صانع القرار
decisions making	١٩،٢٢	صناعة القرارات
decomposition algorithm	٣٤٣	خوارزم التجزئ
degeneracy	١٧٣	التردد (الأضمحلال)
degenerate solutions	١٧٤	حلول مترددة
degree of difficulty	٤٥٥	درجة الصعوبة
demography	٥٠٩	الإحصاء السكاني

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح بالعربي
descriptive statistics	٢٣،٥٠٩	الإحصاء الوصفي
determinants	٣٥	المحددات
discontinuous functions	٣٩٨	الدوال غير المتصلة
dominant variables	٣٢	المتغيرات السائدة
dual problem	٢٧١،٢٨٨	المشكلة الثنائية (البديلة)
duality theory	٤٤٩	النظرية الثنائية
dynamic programming	٣٠	البرمجة الديناميكية
efficient technique	١٤٤١	أسلوب كفء
empty set	١٧١	فئة خالية
entering variable	١١٠،٢١٨	المتغير الداخل
equality constraints	٤٢٤	القيود في شكل متساويات
estimation	٣٦،٣٩،٥١٠	التقدير
exact value	٤١٧،٤٢١	القيمة الدقيقة

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح بالعربي
expert systems	٢٣	الأنظمة الخبيرة
extreme point	٨٨،٣٤٦،٣٥٥،٣٩٨	نقطة طرفية (ركنية)
feasibility conditions	٩٧،٣٦٣	شروط الإتاحة (الإمكانية)
feasible basic solution	٩٠،٩٦،١٢٨	حل أساسي ممكن
feasible solution area	٨٨	منطقة الحلول الممكنة
finite function	٣٥٦	دالة منتهية
forecasting	٥١٠	التنبؤ
fractional programming	٣١	البرمجة الكسرية
frequency tables	٥١١	الجداول التكرارية
game theory	٣١	نظرية المباريات
games models	٤٩٤	نماذج المباريات
Gaus–Jordan method	١١٢	طريقة جاوس جاردن
generalized (signomial) geometric model	٤٥٦	نموذج البرمجة الهندسية العام

المصطلح بالعربي	رقم الصفحة	المصطلح باللغة الانجليزية
المتباينة العددية الهندسية العامة	٤٥٤	generalized arithmetic geometric inequality
البرمجة الهندسية	٣٠،٤٠٢،٤٣٨،٤٤٩	geometric programming
النهاية العظمى المطلقة	٤٠٢	global maximum
النهاية الصغرى المطلقة	٤٠٢	global minimum
الحل الأمثل المطلق	٤٥٥	global optimum solution
برمجة الهدف	٣٠،٩١،١٧٣	goal programming
حلول تقريبية جيدة	٣٣	good approximate solutions
الأشكال البيانية	٥١١	graphic figures
النماذج الكشفية	٣٢	heuristic models
المدرج التكراري	٥١١	histogram
الخوارزم الهنغاري	٢٥٢- ٢٥٥	hungarian algorithm
مصفوفة الوحدة	٤٧٢	identity matrix
إجراء غير كفأ	٩٧	inefficient procedure

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح بالعربي
inequality constraints	٤٢٤	القيود في شكل متباينات
infeasible solutions	١٠٠،١٠٣،٩٥	الحلول غير الممكنة
inflection point	٤٠٦،٤٠٧،٤٢٧	نقطة انقلاب
information	٥١٢ ،٢١،٢٧،٣٧	معلومات
initial feasible basic solution	٩٧،١٠٨	حل أساسي مبدئي ممكن
integer programming	٣٠	البرمجة الصحيحة
integer programming models	٤٩٤	نماذج البرمجة الصحيحة
integrated scientific techniques	١٩	أساليب علمية متكاملة
inventory techniques	٣١	أساليب التخزين
inverse linear programming	٢٧٢،٣٢٩	البرمجة الخطية العكسية
inverse optimization problem	٣٢٧،٣٢٨	معكوس مشكلة الأمثلية
iterative method	٩٧	طريقة تكرارية
knowledge	٢٣،٢٧،٣٧،٥١٢	معرفة

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح بالعربي
Lagrungain method	٤٦	طريقة لاجرانج
large-scale problems	٤٦،٨٤	المشاكل ذات الحجم الكبير
least cost method	٢٠٣،٢٠٦	طريقة أقل تكلفة
leaving variable	١١٠،٢١٨	المتغير الخارج
limited possibilities	٢٢	إمكانيات محددة
linear algebra	٣٥	الجبر الخطى
linear convex combination	٣٥٤،٣٤٨	توليفة خطية محدبة
linear equations	٤٨،٣٩٨،٤٩٤	المعادلات الخطية
linear function	٤٨	الدالة الخطية
linear inequalities	٤٨	المتباينات الخطية
linear programming	٣٠،٨٣	البرمجة الخطية
linearly independent	٣٤٥	مستقلة خطياً
local maximum (minimum) points	٤٠٢،٤٢٤،٤٣٤	النقاط العظمى (الصغرى) النسبية

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح بالعربي
local optimal solution point	٣٩٧،٤٥٥	نقطة حل أمثل نسبي
loss (or nonbinding) constraint	٣٠٢	قيد غير حرج
maintainability systems	٣١	الأنظمة القابلية للصيانة
marginal cost of closed loop	٢١٨،٢١٩	التكلفة الحدية للمسار المغلق
mathematical definitions	٣٤٣	التعريفات الرياضية
mathematical form (formulation)	٣٢،٣٣،٤٥	الصياغة الرياضية
mathematical programming	٣٠،٤٥	البرمجة الرياضية
mathematical rule	٢٠٦	قاعدة رياضية
mathematical statistics	٥٠٩	الإحصاء الرياضي
mathematical techniques	١٩	الأساليب الرياضية
matrices	٣٥	المصفوفات
maximum point	٤٨،٣٩٨	نقطة النهاية العظمي

المصطلح بالعربي	رقم الصفحة	المصطلح باللغة الانجليزية
مؤشرات الموضع	٥١٢	measures of location
مؤشرات التشتت	٥١٢	measures of variation
الطريقة الجبرية	٨٣	algebraic method
طريقة الحل البياني	٨٣،٨٥	graphical method solution
نقطة النهاية الصغرى	٤٨،٣٩٨	minimum point
طريقة التوزيع المعدل	٢٠٣،٢١٨	modified distribution method
أسلوب M	٨٤،١٢٨	M-technique
برمجة تعدد الأهداف	٣٠،٤٦	multi-objective programming
طريقة المضاريب	٢١٨	multiplier's method
المتجهات في n من المحاور	٣٤٣	n-dimensional vectors
الشروط الضرورية والكافية	٩٦،٤٨٣	necessary and sufficient conditions
تامة السالبية	٤٨٢	negative definite

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح بالعربي
negative-semi definite	٤٨٢،٤٨٣	شبة تامة السالبية
network models	٤٩٤	نماذج الشبكات
Newton-Raphson method	٤١٠،٤١٤	طريقة نيوتن رافسون
non-basic solution	١٦٤	حل غير أساسي
non-basic variables	٩٩	المتغيرات غير الأساسية
non-convex set	٣٩٧،٤٠٣	فئة غير محدبة
non-existing feasible solution	١٠٠،١٠٣،١٧١	عدم وجود حلول ممكنة
non-linear equations	٣٩٨	المعادلات غير الخطية
non-linear programming	٤٩٨ ،٣٠،٤٦،٤٠١	البرمجة غير الخطية
non-negative constraints	٤٨	قيود عدم السالبية
non-negative variables	٤٧،٩٩	المتغيرات غير السالبة
non-singular matrix	٣٤٥،٤١٥،٤٧٧	مصفوفة غير شاذة
norm	٤٨٩	مقياس البعد (المسافة)

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح بالعربي
normality condition	٤٥٣،٤٦٥	الشرط الطبيعي
north west corner method	٢٠٣،٢٠٦	طريقة الركن الشمالي الغربي
numerical analysis	٢٥	التحليل العددي
numerical knowledge	٣٨	المعرفة الرقمية
numerical techniques	٢٥	الأساليب العددية
nutrition problem	٤٦	مشكلة التغذية
objective function	٣٤،٤٨	دالة الهدف
optimality conditions	٩٧،٣٥٨	شروط الأمثلية
optimization problems	٣٢٧،٣٢٨	مشاكل الأمثلية
optimization techniques	٣٠،٤٥	أساليب الأمثلية
optimum (best) solution	٣٢،٣٨،٨٨،٣٩٧	الحل الأمثل (الأفضل)
optimum decisions	١٩	قرارات مثلى
orthogonally conditions	٤٥٣،٤٦٥	شروط التعامد

المصطلح بالعربي	رقم الصفحة	المصطلح باللغة الانجليزية
أنظمة الخدمة المتوازية	٣١	parallel service systems
المعلمات	٣٤،٤٧،٣٢٧	parameters
البرمجة المعلمية	٣٤٣	parametric programming
التكلفة الضائعة	١٢٩	penalty cost
العمود المحوري	١١٠	pivot column
العنصر المحوري	١١١	pivot element
العملية المحورية (عملية الدوران)	١١٥،١١٦،١٣٩،١٥٢	pivot process
الصف المحوري	١١١	pivot row
تامة الإيجاب	٤٨٢	positive definite
شبة تامة الإيجاب	٤٨٢	positive-semi definite
دالة ذات حدود موجبة	٤٥١	posynomial function
المشكلة الأصلية	٢٧١،٢٨٨،٣٣٠،٤٥٢	primal problem
البرمجة الاحتمالية	٣٠	probabilistic programming

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح بالعربي
probability distributions	٣٦	التوزيعات الاحتمالية
program evaluation and review techniques	٣١	أساليب توقيت وضبط وتنفيذ المشروعات
project planning models	٤٩٤	نماذج تخطيط المشروعات
pure and applied mathematics	٢٣	الرياضة البحتة والتطبيقية
quadratic form	٤٨١	الصياغة التربيعيـــة
qualitative data	٥١٠	البيانات النوعية
quantitive data	٥١٠	البيانات الكمية
quasidual geometric model	٤٥٦	نموذج هندسي شبة ثنائي
queuing analysis	٤٩٤	تحليل الصفوف
queuing systems	٣١	أنظمة الصفوف
radius convergence	٤٩١	نصـــف قطر التقارب
ranked data	٥١٠	البيانات الترتيبية

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح بالعربي
realistic systems (problems)	٣٢	الأنظمة الحقيقية (المشاكل)
redundant constraints	٩١،١٥٧	القيود الزائدة (غيرفعالة)
regular geometric prog. model	٤٥٢	نموذج البرمجة الهندسي العادي
reliability systems	٣١	أساليب (أنظمة) الصلاحية
replacement system	٣١	أنظمة الإحلال
revised simplex method	٣٤٣،٣٧٦	طريقة السمبلكس المعدلة
saddle point	٤٠٦،٤٠٧،٤٢٧	نقطة ارتكاز
samples	٣٥	العينات
sampling survey	٥١١	أسلوب المعاينة
scare resources	٣١٣	الموارد النادرة
scientific techniques	١٩	أساليب علمية
sensitivity analysis	٢٧١،٣٠٠،٣٤٣	تحليل الحساسية

المصطلح بالعربي	رقم الصفحة	المصطلح باللغة الانجليزية
أنظمة الخدمة المتوالية	٣١	series (tandem)service systems
الفئات	٣٥	sets
الدالة العامة	٤٥١	signomial (generalized) function
طريقة السمبلكس	٢١،٨٣،٩٦،٣٥٤	simplex method
نماذج المحاكاة	٣٢	simulation models
أساليب المحاكاة	٣١	simulation techniques
مصفوفة شاذة	٤٧٧	singular matrix
المتغيرات المكملة	٩٩	slack variables
فراغ الحل	١٦٦،٤٣٤	solution space
مصفوفــة مربــعة	٤٧٢	square matrix
الصياغة المعيارية (القياسية)	١٦٧،٢٧٣،٣٥٠	standard form
نقط الاستقرار	٤٠٤،٤٠٦،٤٢٤،٤٣٣	stationary points
البرمجة العشوائية	٣١،٤٦	stochastic

المصطلح باللغة الانجليزية	رقم الصفحة	المصطلح بالعربي
programming		
stopping stone method	٢٠٣،٢١٨	طريقة المسارات المغلقة
strictly convex function	٤٨٥	دالة شديدة التحدب
structural constraints	٤٨	القيود الهيكلية
sufficient conditions	٤٢٦،٤٣٤	الشروط الكافية
symmetric matrix	٤٨١	مصفوفة متماثلة
system analysis	٢٣،٣٩	تحليل النظم
Taylor series	٤٩١	متسلسلة تيلور
Taylor series expansion	٤٩٢	مفكوك متسلسلة تيلور
temporary degenerate solution	١٧٤	حل تردد وقتي
testing of hypothesis	٣٦،٣٩	اختبارات الفروض
thinking	٢٢،٢٥	التفكير
tight (or binding) constraint	٣٠١	قيد حرج
transportation models	٤٩٤	نماذج النقل

المصطلح بالعربي	رقم الصفحة	المصطلح باللغة الانجليزية
أسلوب المرحلتين	٨٤،١٤٤	two-phases technique
نموذج النقل غير المتوازن	٢٠٠،٢٠٤	unbalanced transportation model
منطقة الحلول الممكنة غير المحددة	١٦٩	unbounded feasible solution area
الحلول غير المحددة	١٦٦	unbounded solutions
مشاكل البرمجة الهندسية غير المقيدة ذات الحدود الموجبة	٤٥٨	unconstrained posynomial GP problems
المشاكل غير المقيدة	٤٠٢،٤٠٤	unconstrained problems
فئة غير خالية	٣٥٦،٣٥٤	unempty set
مصفوفة وحيدة	٤٧٨	unique matrix
حل وحيد	٣٤٥	unique solution
بيانات غير كمية	٥١٠	unquantitive data
المتجهات	٣٥	vectors

المصطلح بالعربي	رقم الصفحة	المصطلح باللغة الانجليزية
طريقة فوجل التقريبية	٢٠٣	Vogal's approximation method(vam)
أساليب الانتظار	٣١	waiting techniques
متوسط مرجح	١٦٤	weighted average
دوال ذات سلوك عادى	٣٩٨	well behaved functions
المصفوفة الصفرية	٤٧٣	zero matrix

أولاً: المراجع العربية

[١] إبراهيم عبدالواحد نائب، د. أنعام عبدالمنعم باقية (١٩٩٩): "بحوث العمليات: خوارزميات وبرامج حاسوبية" دار وائل للنشر – عمان – المملكة الأردنية.

[٢] إبراهيم عبدالواحد نائب، د. أنعام عبدالمنعم باقية (٢٠٠١): "نظرية القرارات: نماذج وأساليب كمية محسوبة" دار وائل للنشر – عمان – المملكة الأردنية.

[٣] برونسون، ترجمة د. حسن حسني الغباري (١٩٨٨): "بحوث العمليات" سلسلة ملخصات شوم – الدار الدولية للنشر والتوزيع – جمهورية مصر العربية.

[٤] زيد تميم البلخي (١٩٩٨): "مقدمة في بحوث العمليات" جامعة الملك سعود – المملكة العربية السعودية.

[٥] عفاف الدش (١٩٨٧): "بحوث العمليات واتخاذ القرارات" مكتبة عين شمس – القاهرة – جمهورية مصر العربية.

[٦] عفاف الدش (٢٠٠٣): "مقدمة في بحوث العمليات: النمذجة – الأساليب – الخوارزميات – التطبيق" جهاز نشر وتوزيع الكتاب الجامعي – جامعة حلوان – جمهورية مصر العربية.

[٧] عفاف الدش (٢٠٠٩): "الرياضيات التطبيقية للعلوم الإحصائية والاجتماعية: الأساليب – التطبيق – استخدام الحزم الرياضية" الجزء الأول – الطبعة الأولى – المكتبة الأكاديمية – الدقي – القاهرة

[٨] عفاف الدش وآخرين (٢٠٠٩): "دليل استخدام الحزم الجاهزة – SPSS Maple – TORA" الطبعة الأولى – جهاز نشر وتوزيع الكتاب الجامعي – جامعة حلوان.

[٩] عفاف الدش (٢٠١٠): "الإحصاء التطبيقي" الجزء الثاني – جهاز نشر وتوزيع الكتاب الجامعي – جامعة حلوان – جمهورية مصر العربية.

[١٠] فاطمة الزهراء (٢٠٠٤): "نموذج احتمالي متعدد الأهداف لحل مشكلة النقل" – رسالة ماجستير – قسم بحوث العمليات – معهد الدراسات الإحصائية – جامعة القاهرة.

[١١] ناهد سعيد (٢٠٠٦): "برمجة تعدد الأهداف وتحليل الانحدار" – رسالة دكتوراه – قسم الرياضيات كلية التربية – جامعة عين شمس.

[١٢] نجيب محمد عبدالله سيف (٢٠٠٦): "دراسة مقارنة لمعكوس مشاكل الأمثلية" رسالة دكتوراه قسم الرياضيات – كلية التربية – جامعة عين شمس – القاهرة.

ثانياً: المراجع الأجنبية

[13] Afaf El-Dash (1984): "Chance-Constrained and Nonlinear Goal Programming", Ph.D. Thesis, Applied Mathematics Dep., North Wales University. U. K.

[14] Afaf El-Dash (1988): "Geometric Programming and Cyclic Aircraft Maintenance Flying System", The Egyptian Computer Journal, ISSR Cairo Univ., Vol. 16, PP.42-59.

[15] Afaf El-Dash and Others (1988): "The Optimum Distribution of Rockets", International Conference, Faculty of Engineering Zagazig Univ., Vol.11, Pag. 73.

[16]Ahuja, R.K. and Orlin, J.B.(1998):"Inverse Optimization" Work Paper, Industrial & Systems Engineering, University of Florida.

[17] Avriel, M. and Williams, A. (1970): "Complementary Geometric Programming", SIAMJ. Appl. Math. Vol. 19, No.1.

[18] Avriel, M., Dembo, R. and Passy, U. (1975): "Solution of Generalized Geometric Programs", Internation J. for Numerical Methods in Engineering, Vol. 9.

[19] Beighter, C. and Phillips, D. (1976): "Applied Geometric Proggramming", John Wiley & Sons, Inc., New York.

[20] Beightler, C.S., Phillips, D.T. and Wilde, D.J. (1979): "Foundations of Optimization", Second Edition, Prentice-Hall, London.

[21] Blau, G. and Wilde, J. (1969): "Generalized Polynomial Programming", The Canadian Journal of Chemical Engineering, Vol. 47, No. 3.

[22] Burton, D. and Toint, L. (1992): "An Instance of the Inverse Shortest Paths Problem", Math. Prog. J. Page – 53 , 45-61.

[23] Conte S. D. and Carl de Boor (1972): "Elementary Numerical Analysis an Algorithm Approach", M.c Graw – Hill Book Company, New York.

[24] Dembo, R. (1972): "GGP. A program for Solving Generalized Geometric Programs, Users Manual", Dep. Of Chemical Engineering Technion, Haifa, Israil.

[25] Dembo, R. (1972): "Solution of Complementary Geometric Programming Problems", M. SC. Thesis, Technion, Haifa, Israil.

[26] Duffin, R., Peterson, E., and Zener, C. (1967): "Geometric Programming Theory and Application", John Wiley & Sons, Inc., New York.

[27] Edited ly Avriel, M. (1980): "Advances in Geometric Programming", Plenum Press, New York.

[28] Gerald L. Bradley and Karl J. Smith (1999): "Calculus", Second Edition, Prentice Hale, New Jersey.

[29] Ghosh Roy, D.N. and Couchman, L.S. (2002): "Inverse Problems and Inverse Scattering of Plane Waves", Academic Press, London.

[30] Gradshleyv and Ryzhik (1969): "Table of Integral's, Series, and Products", Academic Press, New York.

[31] Griffith, R. and Stewart, R. (1961): "A Nonlinear Programming Technique for the Optimization of Continuous Processing Systems", Mang. Sci., Vol. 7, No. 4.

[32] Heba Moustafa (2007): "The Inverse of the Static Traffic Assign – Ment Problem With Constant Link Costs", MSC. Thesis, Dep. Of Statistics, Faculty of Economics and Political Science, Cairo University.

[33]Heuberger, C.(2004):"Inverse Combinatorial Optimization Survey an Problems, Methods and Results", Journal of Combinatorial Optimization Vol. 8, PP. 329.

[34] Heinz K. (1994): "Statistics for Business and Economics", Third Edition, Harper Collins College Publishers, U.S.A.

[35] Jianzhong Z. and Zhenhong L. (1996): "Calculating Some Inverse Linear Programming Problems", Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 72, PP. 261.

[36] Kelley, I. (1960): "the Cutting Plane Method For Solving Convex Programs", Journal Soc. Indust., Appl. Math., Vol. 8, No. 4.

[37] Kendall E. Atkinson (1978): "An Introduction to Numerical Analysis", John Wiley &Sons, New York.

[38] karim, M. A. and Jan R. M. (2005): "Matrix Algebra", Cambridge, U. K. D.

[39] Lawrence L. Lapin (1994): "Quantities Methods for Business Decisions – With Cases", The Dryden Press, Harcourt Brace College Publishers , New York.

[40] Lawrence, L. L. (1993): " Statistics for Modern Business Decisions", Sixth Edition, The Dryden Press, New York.

[41] Lial, Hungerford and Halcomli (2007): "Mathematics With Applications", Ninth Edition, Pearson International Edition, New York.

[42] Melvian J. Moron (1982): "Numerical Analysis: A practical Approach", Macmillan Publishing Co. Inc., New York.

[43] Milan Zeleny (1982): Multiple Criteria Decision Making", M.c Graw – Hill Book Company, New York.

[44] Mital, K.V. (1977): "Optimization Methods In Operations Research and System Analysis", Wiley Eastern Limited, New Delhi.

[45] Nagebi, A. (1993): "Optimization Techniques for Mixed Product Problems – Applied Study for El-Nasr T. V. Company", Msc. Thesis, ISSR, Cairo Univ.

[46] Nada, M. (2011): "A Mathematical Programming Approach for Nonmetric Multidimensional Scaling", Msc. Thesis Dep. Of Statistics, Faculty of Economics and Political Science, Cairo Univ.

[47] Nita H. Shah, Ravi M. Gor, and Hardik Soni (2007): "Operations Research", Prentice – Hall of India, New Delhi-110001.

[48] Panl, W., and Betty, M. (2003): "Statistics for Business and Economics", Fifth Edition, Inc., New York.

[49] Ralph E. Stewer (1986): "Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Applications", John Wiley & Sons, New York.

[50] Rao, S.S.(1978): "Optimization: Theory and Applications", Second Edition, Wiley Eastern Limited, New Delhi.

[51] Ravindra K. A. and James B. O. (2001): "Inverse Optimization", O.R. Journal, Vol. 49, N. 5, PP. 771.

[52] Richard Bronson(1982):"Operations Research", Schoum's Outline Series- Theory and Problems, M.c Graw – Hill - Book Company, New York.

[53] Ronald L. Rardin (1998): "Optimization in Operations Research", Prentice Hall, New York.

[54] Smith Mintan (2007):"Calculus", Third Edition, Mc Graw – Hill Higher Education, New York.

[55] Taha H. (1997): "Operations Research: An Introduction", Prentice Hall, International, INC.

[56] Tan S.T. (2005): "Applied Calculus for Managerial, Life, and Social Sciences", United Kingdom.

[57] Vira Chankong and Yacov Y. Haimes (1983): "Multi-objective Decision Making: Theory and Methodology", Series Volume 8.

[58] White D. J. (1982): "Optimality and Efficiency", John Wiley & Sons, New York.

[59] Wolfe, P. (1970): "Integer and Nonlinear Programming", Ahadil, J. Ed. North Holland Pulitishing Co.

كتب للمؤلفة

- الرياضيات التطبيقية للعلوم الإحصائية والاجتماعية (الأساليب – التطبيق – استخدام الحزم الرياضية) الجزء الأول (سنة ٢٠٠٩م) – المكتبة الأكاديمية– الدقي – القاهرة.
- استخدام الحزم الجاهزة SPSS – Maple – TORA (سنة ٢٠٠٨م) – جهاز نشر وتوزيع الكتاب الجامعي – جامعة حلوان – القاهرة.
- الإحصاء التطبيقي – الجزء الثاني (الإستدلال الإحصائي) – الطبعة الثالثة (سنة ٢٠٠٦م) جهاز نشر وتوزيع الكتاب الجامعي – جامعة حلوان – القاهرة.
- الإحصاء التطبيقي – الجزء الأول (الإحصاء الوصفي) – الطبعة الرابعة (سنة ٢٠٠٠م) جهاز نشر وتوزيع الكتاب الجامعي – جامعة حلوان – القاهرة.
- رياضيات الاستثمار – الطبعة الثانية (سنة ٢٠٠٠م) – جهاز نشر وتوزيع الكتاب الجامعي – جامعة حلوان – القاهرة.
- الرياضيات وصناعة القرارات – الطبعة الثانية (سنة ١٩٩٦م) – مكتـ شمس – شارع القصر العيني – القاهرة.
- نماذج الانحدار (سنة ١٩٩٠م) – مكتبة عين شمس – شارع العيني– القاهرة
- بحوث العمليات واتخاذ القرارات – الطبعة الأولي (سنة ١٩٨٧م) – مكتبة عين شمس – شارع القصر العيني – القاهرة